INSTITUTO FEDERAL DE MINAS GERAIS
CAMPUS SÃO JOÃO EVANGELISTA

DAIANE BEATRIZ COSTA; LARISSA NUNES MARTINS;
MADALENA NUNES LOPES

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DA APLICAÇÃO DE DUAS DIFERENTES METODOLOGIAS

SÃO JOÃO EVANGELISTA
2018

DAIANE BEATRIZ COSTA; LARISSA NUNES MARTINS;
MADALENA NUNES LOPES

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DA APLICAÇÃO DE DUAS DIFERENTES METODOLOGIAS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Minas Gerais – *Campus* São João Evangelista, como exigência parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Me. Wálmisson Régis de Almeida

Coorientador: Me. Tiago de Oliveira Dias.

SÃO JOÃO EVANGELISTA
2018

FICHA CATALOGRÁFICA

C837e Costa, Daiane Beatriz; Martins, Larissa Nunes; Lopes, Madalena Nunes.
2019

O ensino de análise combinatória através da aplicação de duas diferentes metodologias. / Daiane Beatriz Costa; Larissa Nunes Martins; Madalena Nunes Lopes. – 2019.
68f; il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto *Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – Campus São João* Evangelista, 2019.

Orientador: Prof. Me. Wálmisson Régis de Almeida.
Coorientador: Professor Me. Tiago de Oliveira Dias.

1. Método Tradicional. 2. Resolução de Problemas. 3. Estratégias. I. Costa, Daiane Beatriz. II. Martins, Larissa Nunes. III. Lopes, Madalena Nunes. IV. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – Campus São João Evangelista. V. Título.

CDD 511.6

Elaborada pela Biblioteca Professor Pedro Valério

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais
Campus São João Evangelista

Bibliotecária Responsável: Rejane Valéria Santos – CRB-6/2907

DAIANE BEATRIZ COSTA;

LARISSA NUNES MARTINS;

MADALENA NUNES LOPES

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DA APLICAÇÃO DE DUAS DIFERENTES METODOLOGIAS.

Trabalho de conclusão de curso defendido e aprovado em 17 de dezembro de 2108, pela banca constituída por:

____

Prof. Dr. Marcos Alves de Farias

____

Profª. Esp. Sara Lopes da Silva

____

Orientador: Prof. Me. Wálmisson Régis de Almeida

____

Coorientador: Prof. Me. Tiago de Oliveira Dias

DAIANE BEATRIZ COSTA

Dedico esse trabalho à minha família, que sempre esteve ao meu lado, lutando comigo cada etapa dessa conquista, sendo minha base. Sobretudo ao meu irmão Douglas Ricardo Costa, meu maior motivo de orgulho, motivação e inspiração.

LARISSA NUNES MARTINS

Dedico especialmente ao meu filho, Cauã Nunes Soares Ferreira, que a cada sorriso e gesto de amor me proporcionava força e motivação. Aos meus protetores, anjos e amigos, que sempre me confortaram, sendo meu ponto de equilíbrio e paz. A conclusão dessa etapa só foi possível com a ajuda de vocês.

MADALENA NUNES LOPES

Dedico este trabalho a minha família, principalmente ao meu filho Davi Miguel Lopes de Oliveira, e ao meu marido Calebe da Costa Oliveira; que a cada dia me proporcionava com muito carinho e apoio, forças para continuar persistindo nos nossos sonhos, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos primeiramente a Deus, pois sem ele não teríamos forças para essa longa jornada, sem Ele essa conquista não seria possível.

À nossa família por toda paciência, apoio e compreensão, torcendo pelo nosso sucesso a todo momento. Essa conquista é por vocês e para vocês, que são sem dúvida alguma, a nossa base, nosso muito obrigado!

Ao nosso querido orientador, professor e amigo, Me. Wálmisson Régis de Almeida. Dizemos orientador, pois nos guiou durante a execução do trabalho, sendo o líder, mostrando qual caminho a seguir. Dizemos professor, por ter transmitido tantos conhecimentos, contribuindo para nosso crescimento profissional e pessoal. E por fim, dizemos amigo, pois foi isso que se tornou, enfrentando conosco essa difícil etapa de nossas vidas, se mostrando disposto e presente para vencermos juntos essa batalha.

Ao professor Me. Tiago de Oliveira Dias, por também contribuir de forma singular em nossa coorientação.

A Professora Sara pela disponibilidade e contribuição nas fases de pesquisa a campo. Você foi essencial!

A todos os funcionários da Escola Estadual "Josefina Pimenta" onde foi realizada a pesquisa. Vocês foram fundamentais para essa conquista.

Aos amigos e colegas, pelas alegrias, tristezas e desafios compartilhados. Isso tudo nos deu força para continuarmos na luta. Vocês continuarão presentes em nossas vidas para todo o sempre.

Por fim a todos que de forma direta ou indiretamente contribuíram para chegarmos onde estamos hoje, nosso muito obrigado!

"O sucesso nasce do querer, da determinação e persistência em se chegar a um objetivo. Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos, no mínimo fará coisas admiráveis" (José de Alencar)

RESUMO

Devido às recentes discussões e ao grande progresso metodológico, no âmbito educacional, ocorrido a partir do século XX, tornou-se importante a reflexão sobre a implicação direta que os modelos de ensino podem propiciar na vida dos docentes e dos discentes. Tendo isso em vista, este trabalho apresenta uma pesquisa de campo de cunho qualitativo e quantitativo, realizada com alunos de uma turma de 1º ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual do município de São João Evangelista/MG, e teve por objetivo identificar, independente de outros aspectos, se a metodologia de ensino utilizada pelo professor pode interferir nos resultados dos seus alunos. Para isso, foi aplicado, em dois grupos homogêneos, um mesmo conteúdo de Análise Combinatória, sendo o grupo A regido sob o Método de Ensino Tradicional e o grupo B, sob a perspectiva de Resolução de Problemas. Ao fim das aulas, houve a aplicação de avaliações que permitiram analisar os dados de forma quantitativa e qualitativa. Embora esses resultados exprimam conclusões estritamente desse caso, pode-se observar que a metodologia de trabalho e mediação de aulas utilizada pelo docente pode interferir nos resultados desse público.

PALAVRAS-CHAVE: Método Tradicional. Resolução de Problemas. Estratégias.

ABSTRACT

Due to the recent discussions and to the great methodological progress, in the educational scope, occurred from the twentieth century, it became important to reflect on the direct implication that teaching models can provide in the life of teachers and students. With this in view, this work presents a qualitative and quantitative field research, carried out with students from a high school class of a State School in the municipality of São João Evangelista, to identify, independently of other aspects, if the teaching methodology used by the teacher can interfere in the results of his students. For this, the same content of Combinatorial Analysis was applied in two homogeneous groups, group A being governed under the Traditional Teaching Method and Group B under the perspective of Problem Solving. At the end of the classes, there were evaluations that allowed the analysis of the data in a quantitative and qualitative way. Although these results express conclusions strictly of this case, it can be observed that the methodology of work and mediation of classes used by the teacher can interfere in the results of this public.

KEYWORDS: Traditional Method. Problem Solving. Strategies.

LISTA DE SIGLAS

ENCCEJA	Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PFC	Princípio Fundamental da Contagem
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

LISTA DE IMAGENS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O trabalho a seguir consiste em um estudo de pesquisa qualitativa/quantitativa sobre o processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória.

Pode-se entender a Combinatória como o ramo da Matemática responsável pelo estudo de critérios para a contagem do número possível de agrupamentos distintos, formados a partir de uma amostra discreta, submetido a determinadas circunstâncias, sem que seja preciso desenvolvê-los.

Para Morgado et al (1991), a Combinatória "[...] é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas". Segundo os mesmos,

> A maior parte dos alunos do 2º grau responderia que ela é o estudo das combinações, arranjos e permutações. Isso, no entanto, é uma resposta parcial pois, embora combinações, arranjos e permutações façam parte da Análise Combinatória, são conceitos que permitem resolver um tipo de problemas de Análise Combinatória: os de contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos. No entanto, a Análise Combinatória trata de vários outros tipos de problemas e dispõe, além das combinações, arranjos e permutações, de outras técnicas para atacá-los (MORGADO, 1991, p. 1).

O trabalho se deu em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública estadual de São João Evangelista. Para tornar esse estudo possível, foi desenvolvida, aplicada e validada uma sequência didática, tendo como base o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) para introduzir alguns elementos básicos de Análise Combinatória e, como metodologia, o ensino-aprendizagem de Matemática por meio da Resolução de Problemas e pelo método Tradicional, que faz referência à Tendência Liberal Tradicional.

Após o estudo, realizou-se avaliações diagnósticas e um ensaio estatístico para analisar se algum desses métodos trabalhados, aplicados no ensino de Análise Combinatória, apresentou melhores resultados quantitativos na avaliação diagnóstica.

Apesar da proposta de se usar estatística comparativa na análise de modelos de ensino, sabe-se que vários outros fatores influenciam no processo de ensino-aprendizagem que não somente a metodologia, como conhecimentos prévios, o ambiente de sala, a afinidade com o conteúdo, entre outros. Soma-se a isso a limitação intrínseca tanto dos instrumentos de avaliação como dos instrumentos de seleção de amostras. Independentemente dessa influência multifatorial, acredita-se que é possível obter algumas conclusões interessantes. Dessa forma, surgiu a seguinte questão: "Desconsiderando outros fatores influentes, a metodologia de ensino utilizada pelo professor pode interferir no aprendizado do aluno?".

1.1 JUSTIFICATIVA

O interesse pelo tema e pelos métodos de ensino-aprendizagem abordados nesta pesquisa são frutos de experiência das autoras, com trabalhos já realizados em períodos anteriores, e que motivaram a pesquisa nessa temática. Segundo Gil (2007),

> (...) pesquisa é definida como o (...) procedimento racional e sistemático que tem como objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos. A pesquisa desenvolve-se por um processo constituído de várias fases, desde a formulação do problema até a apresentação e discussão dos resultados (GIL, 2007, p. 17).

Na busca de materiais para suporte, foram analisadas algumas pesquisas, artigos e livros didáticos. Neles, pode-se concluir que muitos alunos possuem grande dificuldade com o tema e que “as causas das dificuldades podem ser buscadas no aluno ou em fatores externos, em particular no modo de ensinar a Matemática” (ALMEIDA, 2006, p. 02).

Um dos fatores que causam muitas dificuldades no aprendizado da Análise Combinatória é o ensino voltado à reprodução mecânica de exercícios. Apesar dos enunciados quase sempre trazerem propostas semelhantes, os alunos mal conseguem distinguir permutações, arranjos e combinações. Isso se deve muito à forma com que os livros didáticos e os professores abordam o conteúdo. Sucintamente, por esse motivo, concordamos que

> [...] o vocabulário comum dos livros didáticos, que são apropriados pelos professores e democratizados nas salas de aulas, onde, na maioria das vezes, levam a uma simplificação extremada dos conteúdos além de levá-los a memorizar princípios básicos e aplicá-los de forma mecânica a situações-problema que, na maioria dos livros didáticos, são praticamente idênticas (DORNELAS, 2004, p.6).

Desse modo, pretendeu-se executar o projeto em questão e fazer a análise dos resultados obtidos aplicando-se os dois métodos citados (Resolução de Problemas e método Tradicional) no ensino de Análise Combinatória e comparando os resultados qualitativos e quantitativos obtidos nas avaliações.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é analisar os resultados de avaliações diagnósticas aplicadas a dois grupos de alunos que vivenciaram duas diferentes metodologias de ensino

(Resolução de Problemas e método da Tendência Liberal Tradicional), para o tema Análise Combinatória.

1.2.2 Objetivos específicos

- Elaborar e executar planos de aula, aplicando duas diferentes metodologias para o ensino de Análise Combinatória;
- Instigar, nos alunos, a capacidade de desenvolver estratégias de Resolução de Problemas que não sejam meramente algorítmicas;
- Analisar a construção do conhecimento através da interação entre os alunos em debates e discussões sobre os caminhos usados nas resoluções das atividades entre os grupos.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Embora, no Brasil, haja pouco costume de se trabalhar a quantificação nas pesquisas educacionais, Gatti (2004) defende que a técnica de análise de dados traduzida em números é favorável para a compreensão de diversas questões desse tema. Ressalta-se, ainda, que “a combinação deste tipo de dados com dados oriundos de metodologias qualitativas, podem vir a enriquecer a compreensão de eventos, fatos, processos” (GATTI, 2004, p. 13).

Na pesquisa qualitativa, os pesquisadores não possuem foco na representação numérica dos resultados obtidos, mas sim na compreensão de um grupo social sobre um determinado assunto. Segundo Minayo (2001), a pesquisa qualitativa trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que satisfaz a um ambiente mais fundo das relações, dos métodos e dos acontecimentos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis.

As pesquisas que utilizam os métodos qualitativos procuram esclarecer o porquê de determinado assunto, demonstrando o que convém ser feito, mas não quantificam os valores nem se reprimem à avaliação de fatos, pois os dados estudados são não-métricos. Fonseca (2002) sinaliza que:

> Diferentemente da pesquisa qualitativa, os resultados da pesquisa quantitativa podem ser quantificados. Como as amostras geralmente são grandes e consideradas representativas da população, os resultados são tomados como se constituíssem um retrato real de toda a população alvo da pesquisa. A pesquisa quantitativa se centra na objetividade. Influenciada pelo positivismo, considera que a realidade só pode ser compreendida com base na análise de dados brutos, recolhidos com o auxílio de instrumentos padronizados e neutros. A pesquisa quantitativa recorre à linguagem matemática para descrever as causas de um fenômeno, as relações entre variáveis, etc. A utilização conjunta da pesquisa qualitativa e quantitativa permite recolher mais informações do que se poderia conseguir isoladamente (FONSECA, 2002, p. 20).

Quanto à falta de uma tradição concreta de pesquisas quantitativas no ramo educacional, deve-se considerar que a maioria dos estudos realizados nesse contexto são por autores de outras áreas, que se debruçam sobre o objeto educação, como psicólogos, sociólogos, economistas, físicos e estatísticos, ao passo que, há mais de 20 anos, educadores, mestres e doutores não efetivaram estudos sobre esse método em suas formações. Entretanto, isso não exclui o fato de que existem problemas educacionais que, para uma melhor compreensão e contextualização, podem se utilizar dos dados quantitativos.

Ainda segundo Gatti (2004), conclui-se que esse tipo de estudo fornece informações e interpretações importantes sobre vários aspectos, sobretudo quanto à aprendizagem, mesmo em “trabalhos com foco mais restrito, alguns de natureza quase-experimental”, e que

> [...] é no campo dos estudos de avaliação educacional, mais especialmente nos estudos de rendimento escolar em nível de sistemas ou sub-sistemas, que se encontra a maioria dos estudos de cunho quantitativo nos últimos dez anos [...] algumas referências são os estudos de Vianna (1989) analisando o desempenho de alunos de escolas públicas em cidades de grande porte; [...] Vianna (1991) trabalhando com dados de rendimento escolar de alunos do último ano do ensino médio; [...] Valle (2000) apresentando a Teoria da Resposta ao item e aplicações em estudos avaliativos, sobretudo sobre comparações longitudinais... (GATTI, 2004, p. 24-25).

Os conceitos estabelecidos por Falcão e Régnier (2007) colaboram para o entendimento do papel quantitativo exercido na pesquisa educacional, ao constituírem que “a quantificação abrange um conjunto de procedimentos, técnicas e algoritmos destinados a auxiliar o pesquisador a extrair de seus dados subsídios para responder à(s) pergunta(s) que o mesmo estabeleceu como objetivo(s) de seu trabalho” (FALCÃO E RÉGNIER, 2007, p. 232). Esta é a proposta do projeto: usar dados numéricos como bússola para responder à questão norteadora.

Partindo para o conteúdo matemático do trabalho, segundo Dante (2014), a Análise Combinatória é o campo da Matemática que trata das técnicas de contagem. É a parte da Matemática na qual permutar, arranjar e combinar são práticas utilizadas para resolver os problemas de contagem. Apesar disso, essa é uma visão parcial pois esses métodos, as permutações, arranjos e combinações, resolvem apenas parte dos problemas dessa área.

Pode-se entender também como a parte da Matemática que pondera armações e relações discretas, estabelecendo, assim, um importante instrumento que compreende um amplo campo investigativo, com intensa atividade devido às suas inúmeras aplicações nas mais diversas áreas.

Resume-se em alguns temas principais:

- Princípio Fundamental da Contagem (PFC)
- Permutação
- Arranjo
- Combinação

O **Princípio Fundamental da Contagem** postula que quando um evento é composto por duas etapas sucessivas e independentes, de tal modo que o número de possibilidades de ocorrência da primeira etapa é x e o número de possibilidades de ocorrência da segunda etapa é y, o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto $(x) \cdot (y)$.

Em suma, no PFC, multiplica-se o número de opções entre as escolhas que lhe são apresentadas. Ressalta-se que, embora o enunciado do PFC envolva apenas dois eventos, na prática, é possível induzir que o resultado vale também para um número maior de eventos.

As **Permutações** são agrupamentos ordenados, em que o número de elementos (n) do agrupamento é igual ao número de elementos disponíveis.

Considere um conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots a_n\}$, com n elementos distintos. Suponha a necessidade de se formar grupos com n elementos distintos, de modo que a ordem dos elementos dentro de cada um desses grupos seja importante.

Observe que há n posições a serem preenchidas. Assim, temos:

Quadro 1 – Posições dos elementos nos grupos - Permutações

Posição 1	Posição 2	Posição 3	...	Posição n
$\downarrow$ n	$\downarrow$ $n-1$	$\downarrow$ $n-2$	...	$\downarrow$ 1

Fonte: Elaborado pelas autoras

- A primeira posição pode ser preenchida de n modos.
- A segunda posição pode ser preenchida de $(n-1)$ modos.
- A terceira posição pode ser preenchida de $(n-2)$ modos.

$$\vdots$$

- A n-ésima posição pode ser preenchida de 1 modo.

Pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos que o número de grupos é igual a $n.(n-1).(n-2).(n-3).\dots.1$, ou seja, $n!$. Esses grupos formados são chamados permutações simples dos n elementos, e são indicados por P_n.

$$P_n = n!$$

Nos **Arranjos**, os agrupamentos dos elementos **dependem da ordem** e da natureza dos mesmos. De maneira geral, seja um conjunto discreto $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots a_n\}$, com n elementos distintos queremos formar grupos com p elementos cada (com $n > p$), de modo que a ordem dos elementos em cada grupo seja importante. Assim, temos:

Quadro 2 – Posições dos elementos nos grupos - Arranjos

Posição 1	Posição 2	Posição 3	...	Posição p

↓	↓	↓	…	↓
n	$n-1$	$n-2$		$n-(p-1)$

Fonte: Elaborado pelas autoras

Observe que há p posições a serem preenchidas. Temos que:

- A primeira posição pode ser preenchida de n modos.
- A segunda posição pode ser preenchida de $(n-1)$ modos.
- A terceira posição pode ser preenchida de $(n-2)$ modos.

$$\vdots$$

- A p-ésima posição pode ser preenchida de $n-(p-1)$ modos.

Pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos que o total de grupos formados é igual a:

$$n.(n-1).(n-2).(n-3).\dots.[n-(p-1)] =$$

$$n.(n-1).(n-2).(n-3).\dots.(n-p+1) =$$

$$\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).\dots.(n-p+1).(n-p)!}{(n-p)!} =$$

$$\frac{n!}{(n-p)!}.$$

Esse resultado corresponde ao número de arranjos de n elementos tomados p a p que indicamos por $A_{n,p}$.

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

As **Combinações** são subconjuntos em que a ordem dos elementos **não** é importante. Assim, cada combinação de n elementos tomados p a p correspondem a $p!$ Arranjos distintos, que são obtidos pela permutação dos elementos da combinação, e contados repetidamente. Assim,

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Portanto, em resumo,

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

E por que utilizar Permutações, Arranjos e Combinações numa primeira abordagem do tema? Segundo Morgado et al (2004),

> [...] entre os vários tipos de "números para contagem" da Análise Combinatória, eles são certamente os mais simples e de uso mais amplo. Além disso, eles permitem resolver uma grande quantidade de problemas de Análise Combinatória (MORGADO et al, 2004, p. 2).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam a importância do raciocínio combinatório na formação dos alunos do Ensino Médio.

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio... (PCN, 1998, p. 257).

É possível observar que o ensino da Análise Combinatória se dá, normalmente, através de fórmulas ou padronizações de resoluções. De acordo com Morgado et al (1991),

> A aprendizagem dos conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a análise combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas (MORGADO et al, 1991, p.3).

Filosoficamente, essa metodologia faz parte da Tendência Liberal Tradicional, na qual o processo é mais centrado no professor, que exige do aluno uma aplicação direta da informação fornecida em um domínio restrito. Observa-se a manifestação de tal Tendência desde as escolas confessionais (vinculadas ou pertencentes a confissões religiosas ou à igreja) até a maioria das escolas atualmente. Segundo Luckesi (1994), os métodos dessa tendência

> Baseiam-se na exposição verbal da matéria e/ou demonstração. Tanto a exposição quanto a análise são feitas pelo professor, observados os seguintes passos:
>
> a) Preparação do aluno (definição do trabalho, recordação da matéria anterior, despertar interesse);
> b) Apresentação (realce de pontos-chave, demonstração);
> c) Associação (combinação do conhecimento novo com o já conhecido por comparação e abstração);
> d) Generalização (dos aspectos particulares chega-se ao conceito geral, é a exposição sistematizada);
> e) Aplicação (explicação de fatos adicionais e/ou resoluções de exercícios).
> A ênfase nos exercícios, na repetição de conceitos ou fórmulas na memorização visa disciplinar a mente e formar hábitos. (LUCKESI, 1994, p. 56).

O autor discute, ainda, a relação professor-aluno, concluindo que:

> [...] predomina a autoridade do professor que exige atitude receptiva dos alunos e impede qualquer comunicação entre eles no decorrer da aula. O professor

> transmite o conteúdo na forma de verdade a ser absorvida; em consequência, a disciplina imposta é o meio mais eficaz para assegurar a atenção e o silêncio (LUCKESI, 1994, p. 57).

Além disso, visando a repetição do conteúdo para processo de aprendizado, tal tendência defende a experiência e o cientificismo, ou seja, o aluno aprende quando ele mesmo faz e repete aquilo até não esquecer mais. Até o início do século XX, o ensino da Matemática dava-se por meio dessa repetição, memorização e treinamento. Acerca disso, Onuchic (1999) expõe que:

> A importância dada à resolução de problemas é recente e somente nas últimas décadas é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de se resolver problemas merecia mais atenção. A caracterização de Educação Matemática em termos de Resolução de Problemas reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas como um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou exercício mental (ONUCHIC, 1999, p.203).

Nesse sentido, a Resolução de Problemas se mostra como uma possibilidade de metodologia de ensino a ser utilizada. Essa foi, inicialmente, proposta em meados do século XX, sendo o húngaro George Pólya considerado o pai dessa metodologia. Segundo Pólya (2003), a Resolução de Problemas é uma habilitação, e qualquer habilitação se adquire por meio de imitação e prática.

Desse modo, o professor que deseja desenvolver nos estudantes a capacidade de resolver problemas deve suscitar em suas mentes algum interesse por eles, e proporcionar aos aprendizes oportunidades de exercer sua prática. Entretanto, ensinar a resolver problemas é uma tarefa mais difícil do que ensinar conceitos, habilidades e algoritmos matemáticos. Assim, Pólya descreveu 4 passos para que se possa resolver questões problemas:

1. Compreensão do problema - nesta etapa deve-se identificar o que é conhecido (os dados), o que é desconhecido (o objetivo) e as condições apresentadas;
2. Estabelecimento de um plano - obtém-se um plano quando, de modo geral, sabemos quais os cálculos ou planos/estratégias a fim de obter a incógnita. O importante é a concepção do plano;
3. Execução do plano - o plano nos dá apenas um roteiro geral. É necessário examinar todos os detalhes. Executa-se o plano que se elaborou até chegar à solução. Se se chegar a um impasse, volta-se à fase de planificação;
4. Verificação dos resultados - revisão crítica do trabalho realizado, ou seja, verificação do resultado em função da situação inicial e do raciocínio.

As atividades se voltam para problemas que estimulem o raciocínio, a interpretação e, o mais importante, o desenvolvimento da estrutura de resolução das questões, ao invés de focar apenas no resultado.

Segundo Onuchic (1999, p. 215), “problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver”. E para Dante (1999), a resolução dos exercícios “[...] não é um mecanismo direto de ensino, mas uma variedade de processos de pensamentos que precisam ser cuidadosamente desenvolvidos pelo aluno com apoio e incentivo do professor” (DANTE, 1999, p. 30).

A grande questão é relacionar as informações fornecidas com símbolos matemáticos adequados para a solução dos problemas. O aluno precisa entender a situação, identificando a estratégia mais adequada para a resolução, e isso depende de uma leitura segura e interpretativa. Desse modo, procurou-se esclarecer, de forma objetiva, os propósitos da metodologia da Resolução de Problemas *versus* a metodologia Tradicional, expondo os princípios de renomados autores de cada área, a fim de fazer um paralelo comparativo entre a teoria-prática de cada modelo.

3 METODOLOGIA

A metodologia de uma pesquisa é tida como o esboço da organização e dos caminhos que o pesquisador deve cursar para se obter resultados. Minayo (2007) defende a ideia de que metodologia é

> (...) a) como a discussão epistemológica sobre o "caminho do pensamento" que o tema ou o objeto de investigação requer; b) como a apresentação adequada e justificada dos métodos, técnicas e dos instrumentos operativos que devem ser utilizados para as buscas relativas às indagações da investigação; c) e como a "criatividade do pesquisador", ou seja, a sua marca pessoal e específica na forma de articular teoria, métodos, achados experimentais, observacionais ou de qualquer outro tipo específico de resposta às indagações específicas. (MINAYO, 2007, p. 44).

No presente capítulo, pretende-se discorrer sobre os percursos metodológicos da pesquisa realizada, ou seja, o caminho percorrido para sua realização: local, população-alvo, instrumentos de coleta de dados e sua execução.

Devido à disponibilidade, a pesquisa foi realizada na Escola Estadual Josefina Pimenta, na cidade de São João Evangelista, Minas Gerais, uma escola da rede pública de ensino, localizada na região central da cidade. Essa atende os jovens de todos os bairros e comunidades vizinhas, provenientes de várias classes econômicas, sociais e culturais.

O primeiro passo do trabalho de campo consistiu em visita à escola, as fim de apresentar o pré-projeto e averiguar a disponibilidade da equipe pedagógica e dos alunos das turmas do 1º ano do Ensino Médio quanto aos encontros, e, então, determinar detalhadamente o cronograma: quais e quantos dias, e o horário de aplicação do que estava previsto. A escolha dessa turma para a aplicação se justifica devido ao objetivo do trabalho, já que, para utilizarmos a Resolução de Problemas como método de ensino, era importante que fosse o primeiro contato dos discentes com o tema, visto que o domínio do conteúdo poderia enviesar os resultados da pesquisa.

A proposta elaborada foi apresentada à direção da escola, que autorizou a realização da pesquisa com seus alunos (o termo de autorização encontra-se no apêndice). Os pais e/ou responsáveis foram informados, por escrito, a respeito do projeto a ser desenvolvido (características, justificativa, duração, natureza das atividades) e dos instrumentos utilizados. Posteriormente ao recebimento dos Termos de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) assinados pelos responsáveis dos alunos, foi marcada a data da primeira aula.

Após os assuntos tratados com a escola campo terem sido resolvidos, o foco se alterou para a execução dos encontros. Foram realizados os planejamentos das aulas e a seleção das questões que seriam aplicadas aos alunos. A partir de estudos realizados sobre a Combinatória junto aos modelos de ensino (Resolução de Problemas e Tradicional) e às recomendações dos documentos oficiais sobre metodologias para o Ensino Médio, foram, então, elaboradas as propostas de ensino.

Os dados para a confecção das propostas de execução foram selecionados com base nas ideias de Onuchic (1999, 2008), Vila e Callejo (2006), Pozo (1998), Lester (1982) e, também, nas recomendações dos PCN (Brasil, 1999), além de outros documentos que também ajudaram no aporte teórico e na tomada de decisões sobre elaboração e aplicação do projeto. Procurou-se proporcionar aos alunos a vivência de situações de investigação, exploração e descobrimento para desenvolver a aprendizagem do conteúdo em estudo.

Em sua pesquisa, Braumann (2002) aponta que:

> Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão 'detectivesca' indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles. (BRAUMANN, 2002, p. 5).

Assim, segundo essa linha, é importante ressaltar que a Matemática está ligada à sua própria investigação, ou seja, não se consegue fazer Matemática sem exercitá-la.

O trabalho foi desenvolvido em uma turma de 1° ano do Ensino Médio, através da composição dos dois grupos. Esses grupos foram formados a partir da aplicação de uma avaliação diagnóstica, construída com questões de avaliações do processo seletivo para ingresso no Instituto Federal de Minas Gerais - Campus São João Evangelista, baseada em conceitos do Ensino Fundamental ligados à Álgebra, considerados básicos para o desenvolvimento das competências e habilidades de Análise Combinatória.

Os grupos foram separados pelas notas obtidas nessa avaliação, de forma decrescente, do seguinte modo: aluno de melhor nota, grupo A; aluno com a segunda melhor nota, grupo B; aluno com a terceira melhor nota, grupo A; e assim, sucessivamente. Dessa forma, esperava-se que as equipes fossem homogêneas em termos de conhecimentos prévios de Matemática. Além disso, as questões utilizadas foram idênticas para os dois grupos, para que não houvesse possibilidade de a escolha das atividades interferir no resultado da avaliação final. No total, havia 26 alunos interessados em participar do projeto. Desse modo, cada grupo foi composto com 13 alunos.

No início, o objetivo era a execução do projeto em contra turno. Como, regularmente, as aulas ocorrem no horário matutino, o projeto seria desenvolvido no vespertino. O primeiro encontro foi marcado, mas não houve comparecimento de nenhum participante. Em conversa com os alunos, levando-se em conta a dificuldade do deslocamento em contra turno, foi agendada uma reunião com a professora responsável pela disciplina de Matemática da turma, e ela disponibilizou suas aulas para o desenvolvimento do projeto.

Visando não prejudicar os alunos com relação aos conteúdos programáticos lecionados pela professora, foram utilizados dias letivos em que a disciplina oferecia 2 aulas. Assim, em um horário, era desenvolvido o trabalho com o grupo A e, no outro horário, com o grupo B, de forma alternada, para que o grupo que não estivesse no horário do presente projeto ficasse sobre a regência da professora em outra atividade, e em outro local.

Chamaremos grupo A aquele em que se utilizou o Método Tradicional para o ensino. Para esse grupo, investiu-se em uma apresentação do conteúdo de forma direta pelo professor, com a apresentação das fórmulas de modo explícito, e, em seguida, a aplicação dos exercícios, de modo que os alunos, de fato, vivenciassem o processo de repetição, já que essa dinâmica estimula a memorização.

Nas aulas regidas sob o método Tradicional, os conceitos e fórmulas da Combinatória foram apresentados para os alunos e, posteriormente, eram ofertadas as questões para memorizar o esquema de resolução, ocasionando, por parte do aluno, o arquivamento de como esses exercícios eram desenvolvidos. Tudo tratado como um “siga o modelo”, e que, após reproduzido inúmeras vezes, fosse gravado o modo de se chegar aos resultados.

Denomine-se grupo B o grupo que trabalhou com o método da Resolução de Problemas. Para esse grupo, foi proporcionado um trabalho de situações-problema, que aguçassem o interesse dos alunos. Iniciava-se a apresentação do tema com uma questão problema norteadora, que fosse atrativa aos discentes. A partir daí, os alunos, na busca pelos resultados, desenvolviam um caminho para a resolução de cada questão. Isso dependia do contexto de cada atividade.

Contrapondo-se à metodologia anterior, para as aulas de Resolução de Problemas, foi desenvolvida uma proposta de ensino cujo foco não se concentrasse na apresentação ou dedução das fórmulas pelo professor, mas na investigação e desenvolvimento de atividades, para, posteriormente, se chegar às fórmulas. Para isso, procurou-se apresentar situações que se mostrassem interessantes e desafiadoras para os alunos, levando em conta o seu cotidiano e casos visualmente possíveis de se imaginar, que apresentassem similaridade com as propostas dos exercícios.

As atividades foram realizadas individualmente, em duplas ou em grupos de 3 ou 4 alunos. O objetivo de agrupá-los foi proporcionar a oportunidade de discussão das questões entre si, para que, assim, desenvolvessem a habilidade da argumentação e socialização do raciocínio empregado. As atividades em folhas e/ou propostas no quadro de giz utilizaram apenas materiais usuais de sala de aula, como lápis, borracha e caneta e, em algumas ocasiões específicas, permitiu-se o uso de calculadora.

Após a efetivação dos encontros, com a abordagem mais explicita do conteúdo para o grupo A e das questões motivadoras como ponto de partida para amostragem do conteúdo para o grupo B, houve a aplicação de duas avaliações objetivas, idênticas para os dois grupos, a fim de fazer uma análise quantitativa por meio dos resultados:

1) A 1ª Avaliação Objetiva foi constituída de 10 questões retiradas de um livro didático de rede pública, (Dante - Contextos e Aplicações, 2014). Livro esse que já havia sido analisado em outra pesquisa, motivo de justificativa para o tema deste trabalho. Nesse estudo, notou-se que Dante apresentava questões que, embora fossem de nível fácil, eram contextualizadas com situações típicas do dia a dia. Em suma, era exatamente o que se procurava para apresentar aos alunos em uma primeira avaliação: simples, mas não algorítmica.

2) A 2ª Avaliação Objetiva foi elaborada com a intenção de comparar se, mesmo aumentando o nível das questões, a média entre os grupos permaneceria próxima ou não. Para isso, a avaliação foi constituída de questões retiradas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), do Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (ENCCEJA) e de processos seletivos para egressos em universidades, tendo em vista que essas exigem a maior capacidade de interpretação do enunciado, até porque se destinam a alunos concluintes do Ensino Médio. Além disso, por sua vez, discutem também situações cotidianas.

3) Por fim, foi elaborado um último teste com questões abertas, uma Avaliação

Discursiva, que abordava, de forma sucinta, todo o conteúdo visto e trabalhado, com a finalidade de observar os percursos traçados na solução dos problemas propostos e efetuar a comparação dos meios de resolução utilizados pelos alunos dos dois grupos. Para completar essa análise qualitativa, foi feita uma pergunta reflexiva, pessoal, aos alunos, sobre o que acharam da metodologia utilizada nessas aulas.

A partir da aplicação em campo e da coleta de resultados, analisou-se se, de fato, a metodologia utilizada pelo professor interferiu nos resultados das avaliações diagnósticas. Por meio da análise das médias de acertos nas avaliações pelos dois grupos, determinou-se qual dos métodos gerou melhor resultado quantitativo. Além disso, a aplicação de um teste de questões discursivas teve como objetivo avaliar o desenvolvimento das questões e a influência da metodologia de ensino na satisfação dos discentes com as aulas.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo tem por finalidade apresentar o resultado dos dados obtidos, explorando e comparando os resultados quantitativos e as resoluções e estratégias utilizadas pelos membros dos dois grupos.

Sobre o trabalho cooperativo e a formação das duplas/grupos para as resoluções, evidencia-se que, devido à dificuldade de expressão de suas ideias ou comodismo, é comum, no trabalho em grupo, que alguns alunos não se envolvam ou deixem de executar suas tarefas, o que aconteceu.

Ainda assim, buscou-se efetivar a participação de todos, ressaltando o acompanhamento e assistência aos grupos com intervenções, quando necessárias, e indagações direcionadas a determinados alunos. Ressalta-se, ainda, o estímulo que foi dado aos alunos para a efetivação do trabalho em grupo, para que pudessem interpretar as questões, criar estratégias, argumentar e expressar suas ideias de modo objetivo e claro. Procurou-se incentivar e avaliar as ideias, como forma de motivá-los e evitar o desânimo que pudesse aparecer frente aos problemas.

Em suma, para os alunos do Modelo Tradicional, investiu-se em uma apresentação do conteúdo de forma direta pelo professor, com a apresentação das fórmulas de modo explícito e, em seguida, a aplicação dos exercícios, de modo que os alunos, de fato, aprendam pela repetição, já que este modelo estimula a memorização. Notou-se que alguns desses alunos apresentavam grandes dificuldades na memorização das fórmulas gerais e na compreensão da utilização delas na aplicação de situações-problema.

Para o grupo B (Resolução de Problemas), propiciou-se um trabalho de situações-problema que aguçasse o interesse dos discentes. Iniciava-se a apresentação do tema com uma questão-problema norteadora a fim de atrair a atenção e, a partir daí, os alunos, na busca pelos resultados, não apenas aplicariam as fórmulas, pois não possuíam um modelo singular para seguir, mas deveriam se atentar à interpretação do enunciado para explorar possíveis soluções para cada problema.

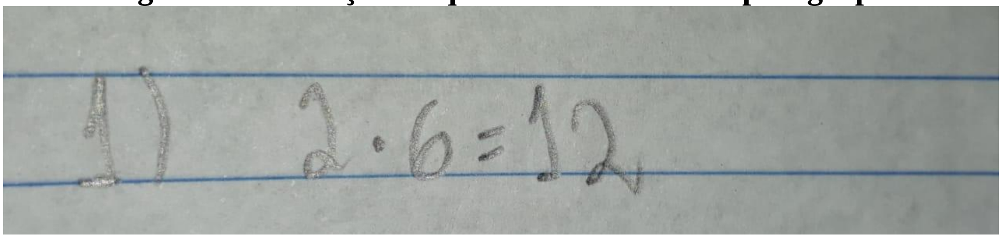
Como já mencionado, as aulas do grupo A iniciaram-se com a apresentação dos conceitos e fórmulas, e as aulas do grupo B, com uma questão norteadora, de modo que os alunos fossem instigados a resolver problemas sem que o professor apresentasse a eles um exemplo inicial como base. Cabe ressaltar que as questões aplicadas foram as mesmas, retiradas do livro didático de Dante (2014).

Situação problema 1

Ao lançarmos uma moeda e um dado, quais as possíveis possibilidades para o resultado, sendo C: cara e c*: coroa?

Essa primeira questão teve como finalidade apresentar uma situação imaginável, para que os alunos pudessem visualizar o problema. Como o grupo A havia tido contato com as fórmulas algébricas no primeiro momento de explicação do conteúdo, esses desprezaram as hipóteses e as possíveis estratégias, partindo, diretamente, para a aplicação do algoritmo. Como exemplo, segue a estrutura de resolução de um aluno desse grupo:

Imagem 1 – Resolução da questão motivadora 1 pelo grupo A

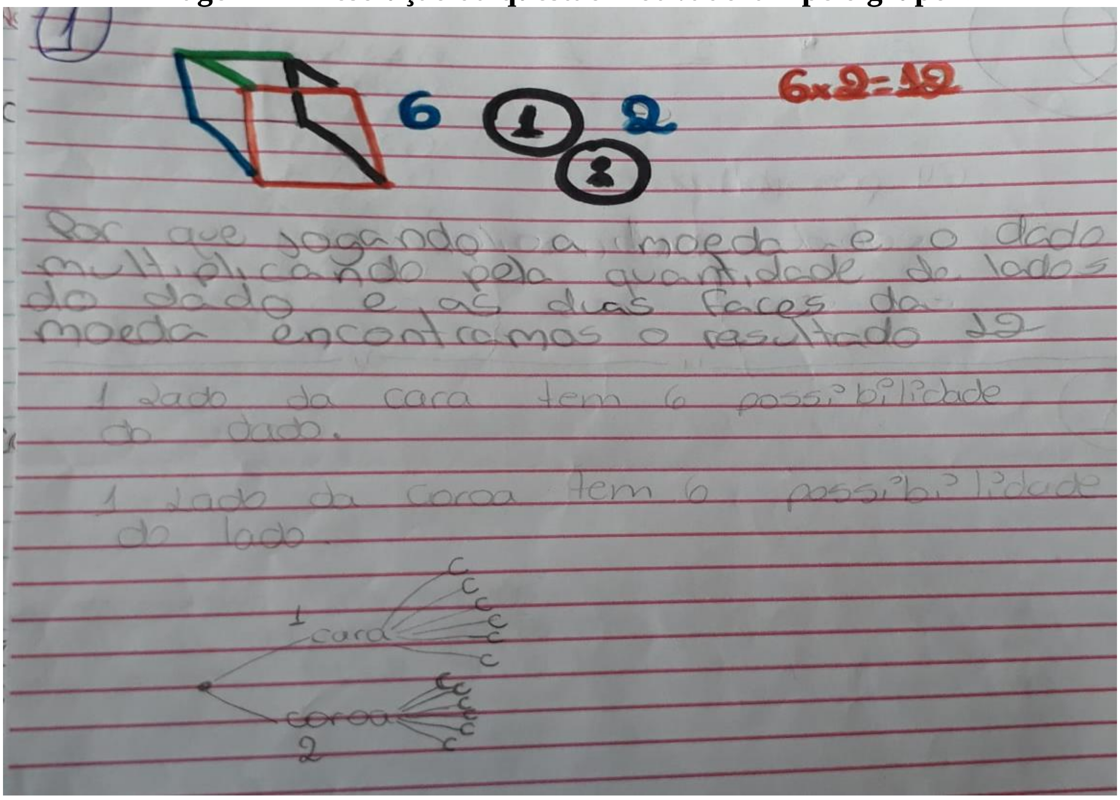


Fonte: Dados da pesquisa

Como se pode perceber, foi feita apenas a multiplicação da quantidade de lados da moeda pela quantidade de lados do dado. Não houve a apresentação da fórmula do PFC. De modo geral, confirmou-se que praticamente todos os alunos do Modelo Tradicional apresentaram uma breve resolução, quase idêntica a essa.

Por outro lado, para o grupo de Resolução de Problemas, foi estipulado um tempo de 20 minutos para que os alunos apresentassem suas ideias de abordagem do problema, já que não houve uma primeira explicação sobre o conteúdo. Por isso, houve muitas perguntas, principalmente por falta de interpretação do enunciado e dificuldade para extrair os dados. Entretanto, ao entenderem o que era pedido, as estratégias usadas foram satisfatórias, como se vê a seguir:

Imagem 2 – Resolução da questão motivadora 1 pelo grupo B



Fonte: Dados da pesquisa

De modo geral, os alunos do Grupo B exploraram mais os caminhos para se resolver o problema, conseguindo chegar ao resultado correto, mesmo sem conhecimento da fórmula geral.

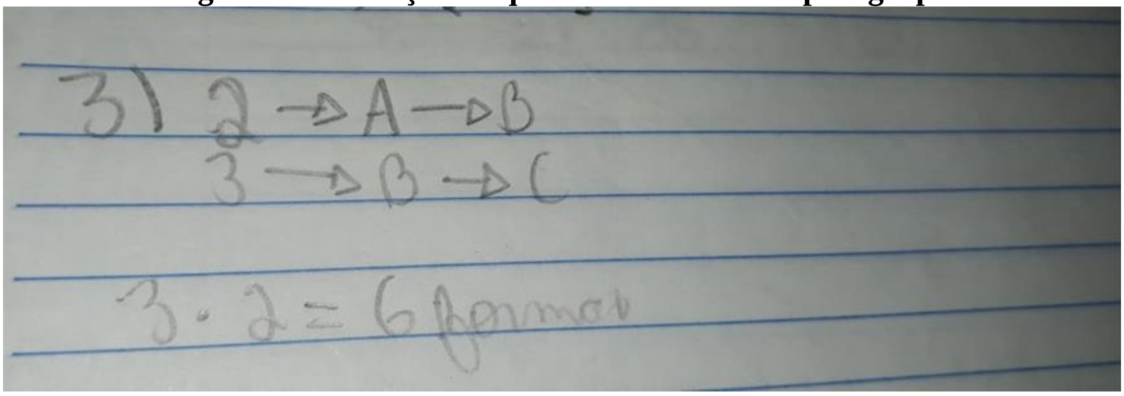
Ressaltamos um caso particular de uma dupla do grupo B que não obteve resultado satisfatório nessa atividade pelo fato de confundirem a proposta. Ao invés de procurarem as possibilidades dos casos (ou seja, realizarem a contagem do espaço amostral), as componentes entenderam que o objetivo do problema era o cálculo de probabilidades (a dupla possuía noções básicas de probabilidade do Ensino Fundamental II). Entretanto, nas discussões e correções das questões entre grupos, elas perceberam imediatamente o que tinham feito de errado, compreendendo a solução.

Situação problema 2

Existem 2 vias de locomoção de uma cidade *A* para uma cidade *B* e 3 vias de locomoção de uma cidade *B* para uma cidade *C*. De quantas maneiras pode-se ir de *A* a *C* passando por *B*?

Mais uma vez, os alunos do grupo A realizavam esboços rudimentares da situação retirada do problema, e, simplesmente, aplicaram as fórmulas para chegar à solução.

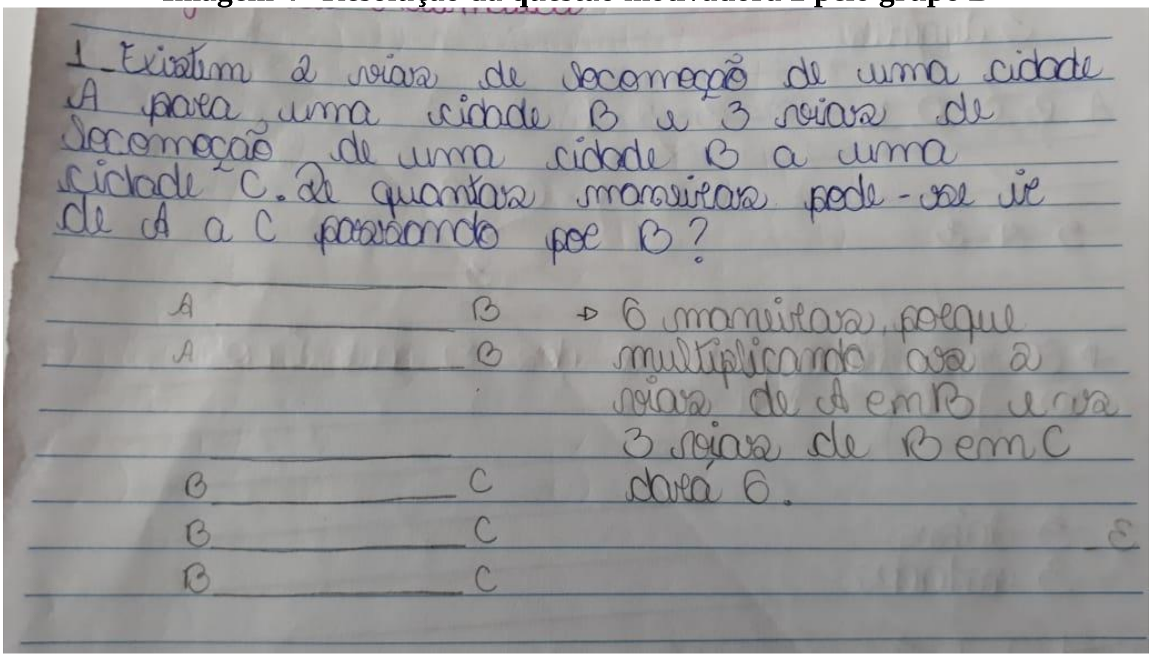
Imagem 3 – Resolução da questão motivadora 2 pelo grupo A



Fonte: Dados da pesquisa

Em contrapartida, os alunos do grupo B apresentaram esboços e explicações acerca do que estava sendo solicitado. A partir dessa segunda questão, percebeu-se que, na atividade anterior, a solução encontrada consistiu na multiplicação dos eventos, logo, nessa questão, eles não tiveram dúvidas, conseguindo, assim, de forma mais imediata, chegar à solução da questão. Nesse momento, percebe-se a interiorização de um modelo, deduzido pelos próprios alunos, sem a apresentação pelo professor.

Imagem 4 –Resolução da questão motivadora 2 pelo grupo B



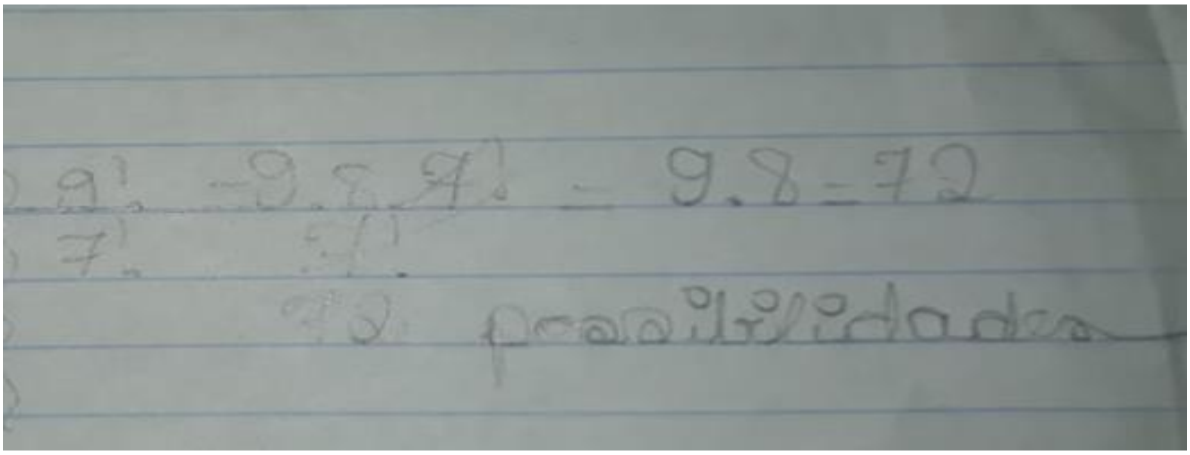
Fonte: Dados da pesquisa

Situação problema 3

Quantos números de 2 algarismos diferentes podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

O objetivo dessa questão era introduzir o conceito de arranjo. Para o grupo A, fica evidente que, no caso dos que obtiveram êxito, a questão foi resolvida a partir da utilização de fórmulas apresentadas pelas pesquisadoras. Não houve manifestação de outros meios para solucionar a questão quando apresentamos previamente as fórmulas. Nesse caso, o que o aluno faz é seguir o padrão.

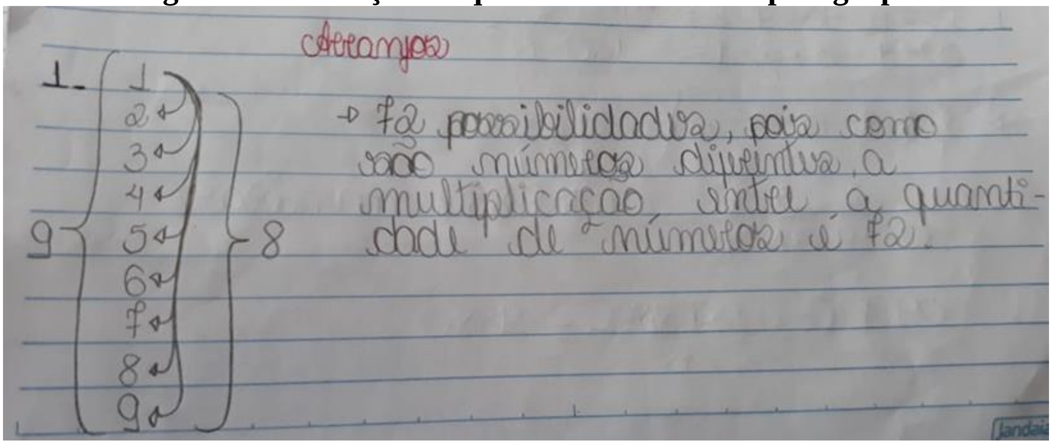
Imagem 5 – Resolução da questão motivadora 3 pelo grupo A



Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos do grupo B mostraram um esboço de como seria solucionada a questão, demonstrando ter mais desenvoltura para encontrar a resposta. Através das discussões em grupos, o uso pertinente das contribuições de cada aluno dá a entender que eles compreendem o caminho a seguir, sem necessitar da utilização de fórmulas. No início da resolução, notou-se que algumas duplas estavam na tentativa de exibir todos os casos possíveis, mas viram que não iriam conseguir listar todos por talvez se esquecerem de algum, e que, se estivessem submetidos a uma avaliação, não teriam tempo de fazer dessa maneira. Então, desenvolveram seus próprios métodos para chegar à resposta sem a necessidade de fazer a listagem.

Imagem 6 – Resolução da questão motivadora 3 pelo grupo B



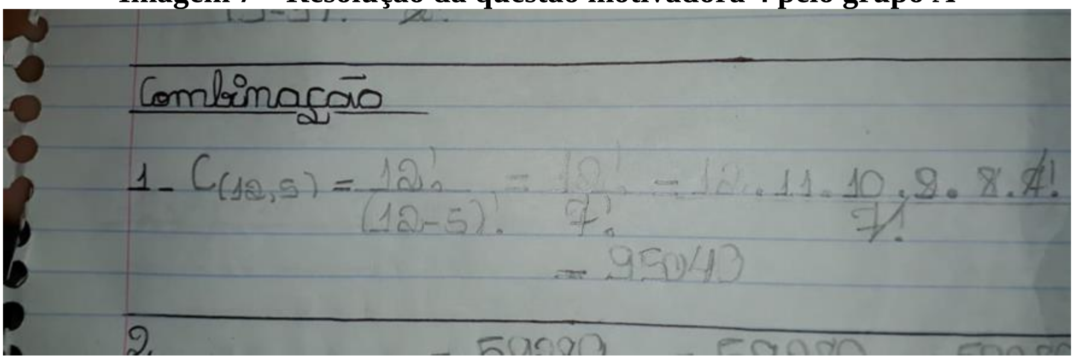
Fonte: Dados da pesquisa

Situação problema 4

De quantas maneiras diferentes um técnico pode escalar seu time de basquete, tendo a sua disposição 12 atletas que jogam em qualquer posição?

Para a realização dessa atividade, os alunos tiveram que descobrir as diferentes combinações que o técnico poderia escalar seu time. Os alunos do grupo A partiram diretamente para resolver o problema por fórmulas, método ensinado a eles. Isso levou alguns dos alunos desse grupo a chegar a um resultado incorreto, por ter aplicado a fórmula de maneira errônea. Notou-se que esse fato aconteceu por esquecimento de qual a fórmula a ser usada ou por não saber empregá-la. As fórmulas, quando memorizadas, muitas vezes, têm por consequência levar o aluno ao erro, talvez por interpretarem mal sua finalidade ou por não lembrar qual a fórmula adequada a se usar. Nota-se que o aluno da resolução abaixo se confundiu com as fórmulas de combinação e arranjo.

Imagem 7 – Resolução da questão motivadora 4 pelo grupo A

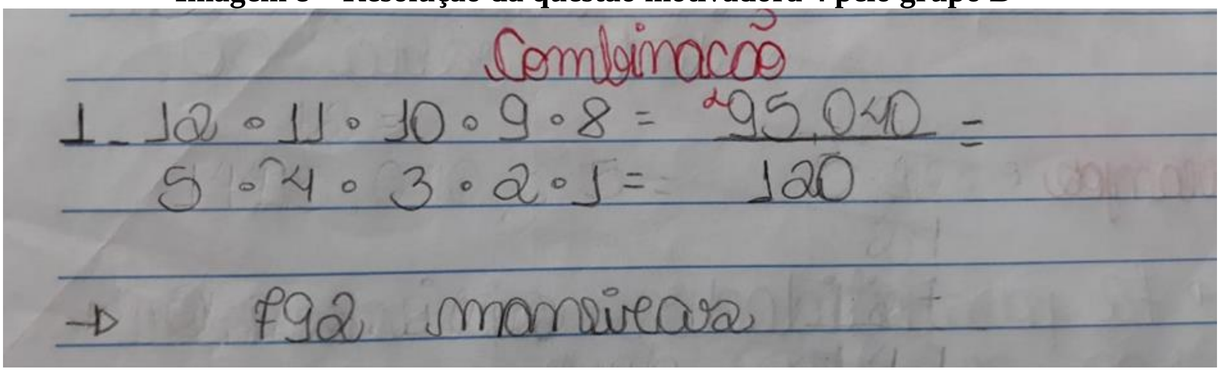


Fonte: Dados da pesquisa

No caso do grupo B, os alunos perceberam, durante as discussões em grupo, que, para o primeiro lugar da escalação, o técnico teria a sua disposição os doze atletas; para o segundo lugar, teria a sua disposição onze jogadores, visto que um deles já tinha sido escalado, e, assim, sucessivamente. Os alunos entenderam o processo no qual teriam que descobrir de quantas maneiras isso seria possível, mas não perceberam que a ordem era irrelevante.

Nesse momento, houve necessidade de intervenção das pesquisadoras. Em primeiro lugar, porque alguns alunos não sabiam quantos jogadores compunham um time de basquete. Mas, principalmente, porque a descoberta da irrelevância de ordem de escolha não é óbvia. Com auxílio, os alunos conseguiram descobrir que é necessário eliminar as repetições. Vemos, com esse exemplo, que o método de Resolução de Problemas nem sempre poderá ser unilateral, já que alguns raciocínios mais complexos não constam no rol de competências dos discentes. Na imagem abaixo, um exemplo de resolução do grupo B. Nessa altura, a pesquisadora já havia caracterizado o problema como uma Combinação.

Imagem 8 – Resolução da questão motivadora 4 pelo grupo B



Fonte: Dados da pesquisa

Foi possível perceber, nesse grupo de estudo, que o uso da Resolução de Problemas implica, diretamente, respostas mais elaboradas, organização na transcrição das ideias e resultados alcançados por caminhos mais longos. Entretanto, as resoluções trazem mais informações que se apresentam mais relevantes do que um simples cálculo aplicado a uma fórmula geral, sem vestígios de qualquer outra ideia de solução para a situação problema.

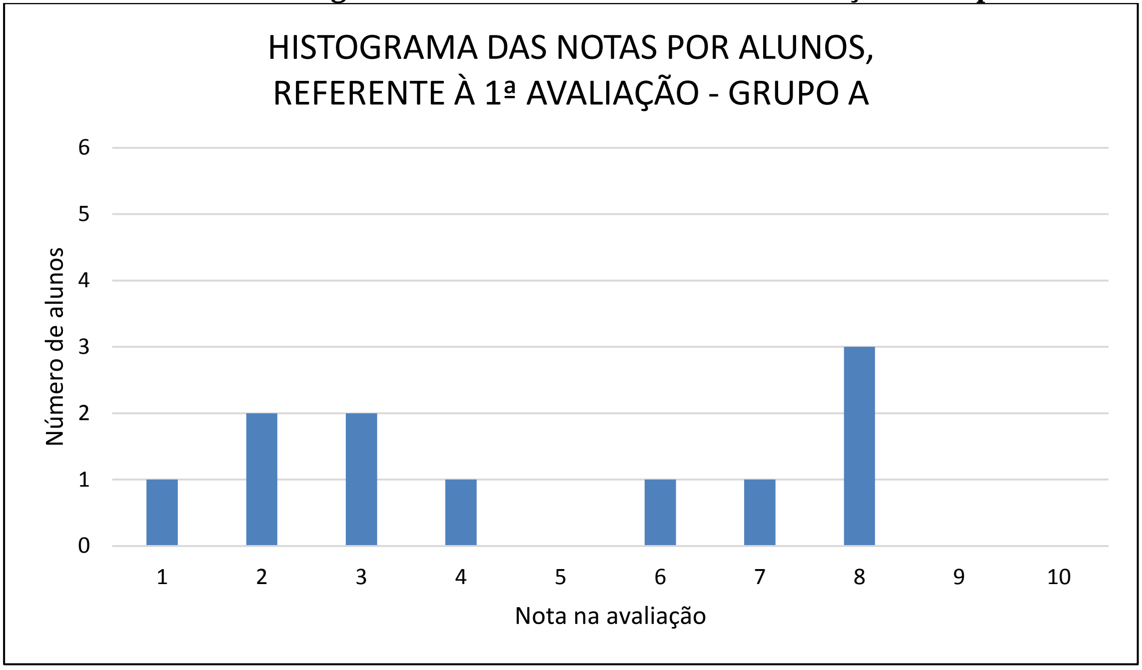
4.1 RESULTADOS DAS AVALIAÇÕES OBJETIVAS

Primeiramente, é importante mencionar que, pelo fato das avaliações externas fornecerem opções de múltipla escolha, optou-se por acrescentar às questões do livro didático essas opções (no caso da 1ª avaliação), já que o objetivo era obter resultados quantitativos e analisar a média alcançada pelos grupos nas duas provas, sem que a resposta aberta pudesse alterar a quantificação dos resultados.

Tendo em vista a análise quantitaviva dos dados, diferente da etapa anterior, este tópico apresenta histogramas que resumem, de forma clara, quantos alunos de cada grupo alcançaram determinada nota. Lembrando que cada grupo possuía 11 alunos e que as notas poderiam variar de 0 a 10.

Assim, segue abaixo o histograma referente à primeira avaliação:

Gráfico 1 - Histograma das notas referentes à 1ª avaliação - Grupo A

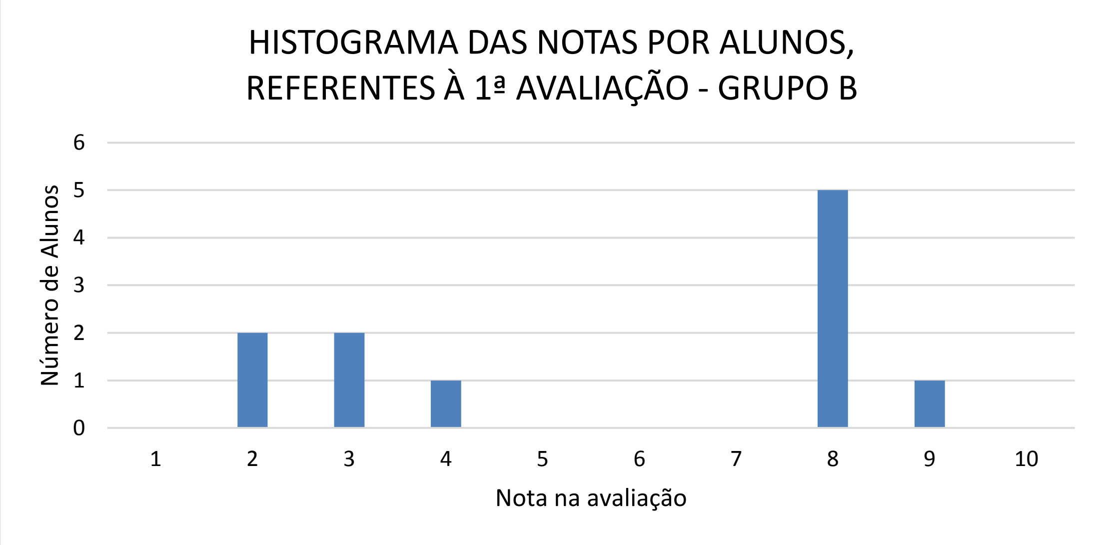


Fonte: Elaborado pelas autoras

Pelo gráfico, observa-se que a moda no grupo A foi 8 pontos, com três alunos obtendo esse resultado. Contudo, a maior parte dos alunos variaram suas notas entre 1 e 4, ou seja, a maior parte desse grupo não alcançou um resultado satisfatório, o que gerou uma média da turma de 4,72 dos 10 pontos totais.

A seguir, tem-se o histograma do grupo B:

Gráfico 2 - Histograma das notas referentes à 1ª avaliação - Grupo B

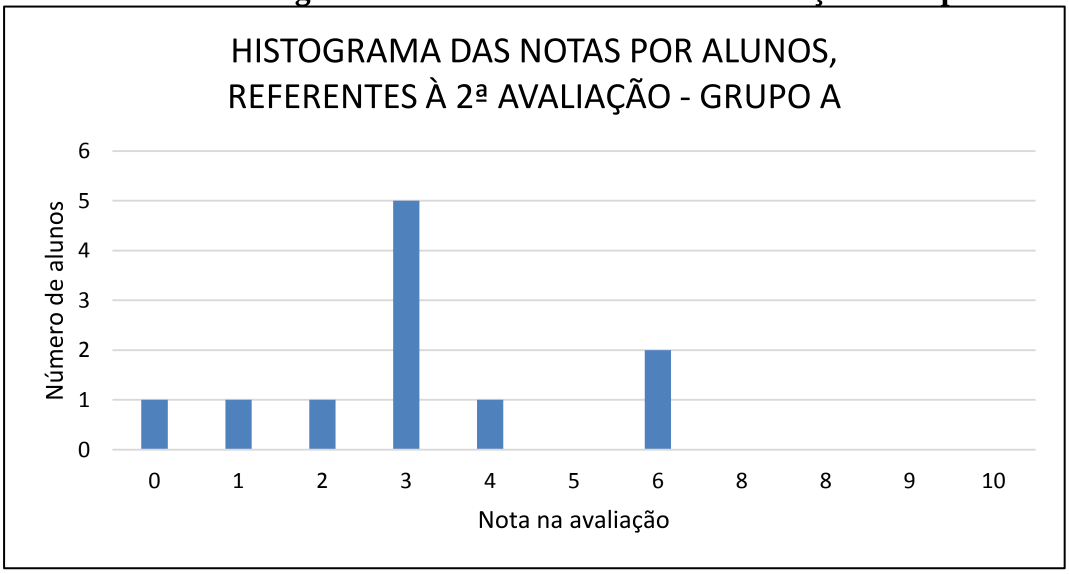


Fonte: Elaborado pelas autoras

Os resultados alcançados pelo grupo B também mostram que 8 pontos foi a moda (5 alunos), ainda que uma aluna tenha alcançado 9 pontos. Diferente do grupo anterior, a maior parte do grupo B obteve bons resultados e uma média de 5,63, o que leva à conclusão de um resultado geral melhor.

Assim, numa visão quantitativa entre grupos homogêneos, pode-se concluir que o grupo B, com uma média geral maior, obteve resultados mais satisfatórios nas avaliações que o grupo A. A mesma análise foi realizada para as notas da segunda avaliação.

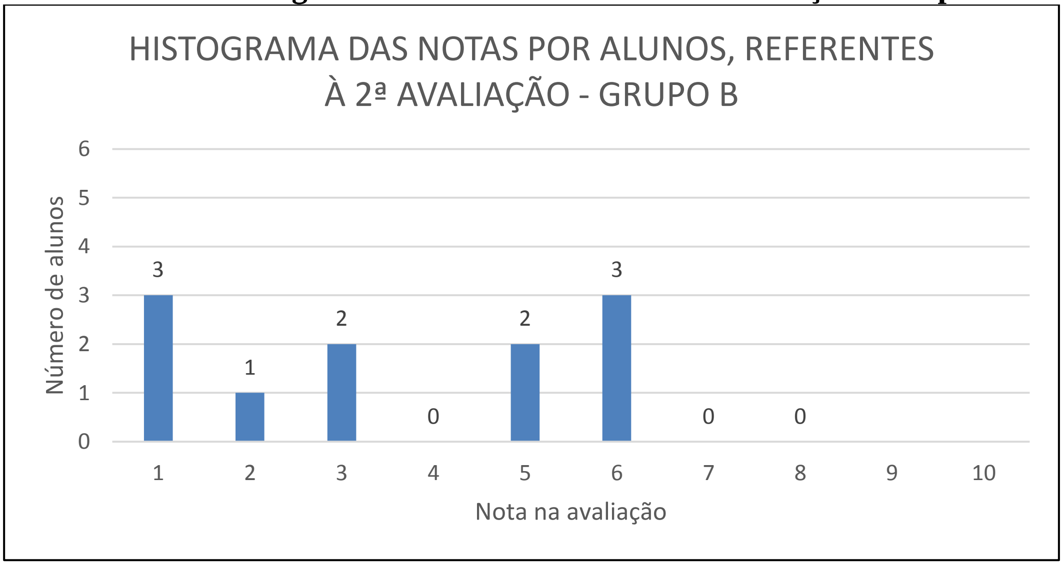
Gráfico 3 - Histograma das notas referentes à 2ª avaliação - Grupo A



Fonte: Elaborado pelas autoras

Percebe-se que, devido à maior dificuldade das questões da segunda avaliação, houve uma queda no rendimento global na maior nota do grupo A, decrescendo de 8 para 6 pontos, se comparado à prova anterior, e um maior índice de alunos com nota 3. Além disso, houve, desta vez, quem zerasse a atividade. Isso resultou em uma média muito baixa, de apenas 3,09.

Gráfico 4 - Histograma das notas referentes à 2ª avaliação - Grupo B



Fonte: Elaborado pelas autoras

Embora a maioria dos alunos do grupo B também tenham ficado abaixo da média, 60% dos 10 pontos totais, e que a maior nota também teha sido 6, ressalta-se que as demais notas, se comparadas com as notas do grupo A, ainda que baixas, foram mais satisfatórias, totalizando uma média da turma de 3,55.

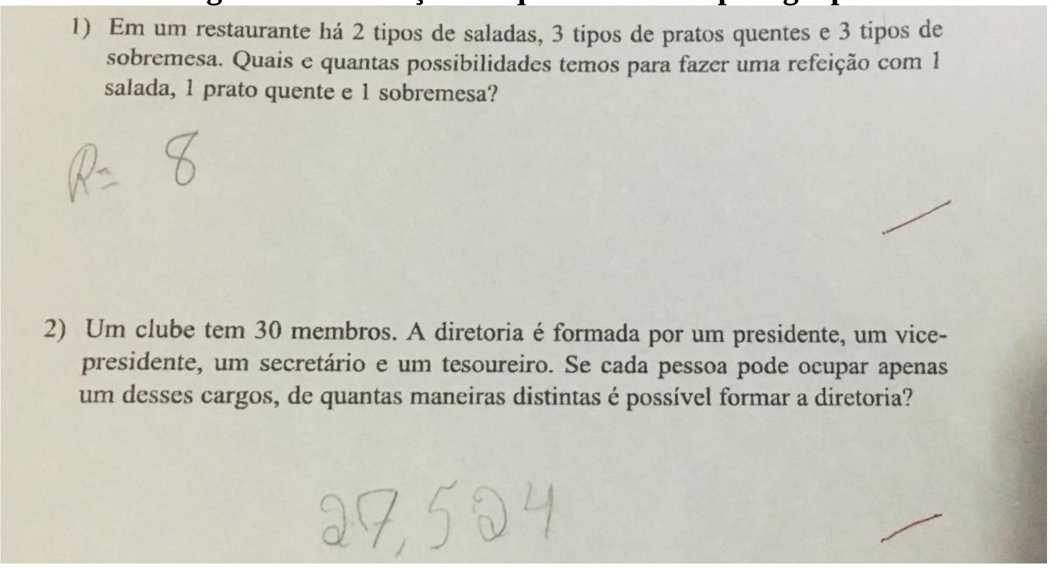
Desse modo, em um panorama geral da avaliação 2, constata-se novamente que o grupo B, do modelo Resolução de Problemas, apresentou melhor resultado médio se comparado ao grupo A, do modelo Tradicional.

4.2 RESULTADO DA AVALIAÇÃO DISCURSIVA

Esse último teste foi idealizado na perspectiva de se avaliar o desenvolvimento das etapas de resolução das questões. Os resultados obtidos colaboraram para identificação das estratégias usadas por membros de cada grupo, de acordo com os conceitos e ideias de cada metodologia aplicada.

A imagem a seguir retrata a resolução de um dos alunos, membro do Grupo A:

Imagem 9 – Resolução da questão aberta pelo grupo A



1) Em um restaurante há 2 tipos de saladas, 3 tipos de pratos quentes e 3 tipos de sobremesa. Quais e quantas possibilidades temos para fazer uma refeição com 1 salada, 1 prato quente e 1 sobremesa?

R= 8

2) Um clube tem 30 membros. A diretoria é formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Se cada pessoa pode ocupar apenas um desses cargos, de quantas maneiras distintas é possível formar a diretoria?

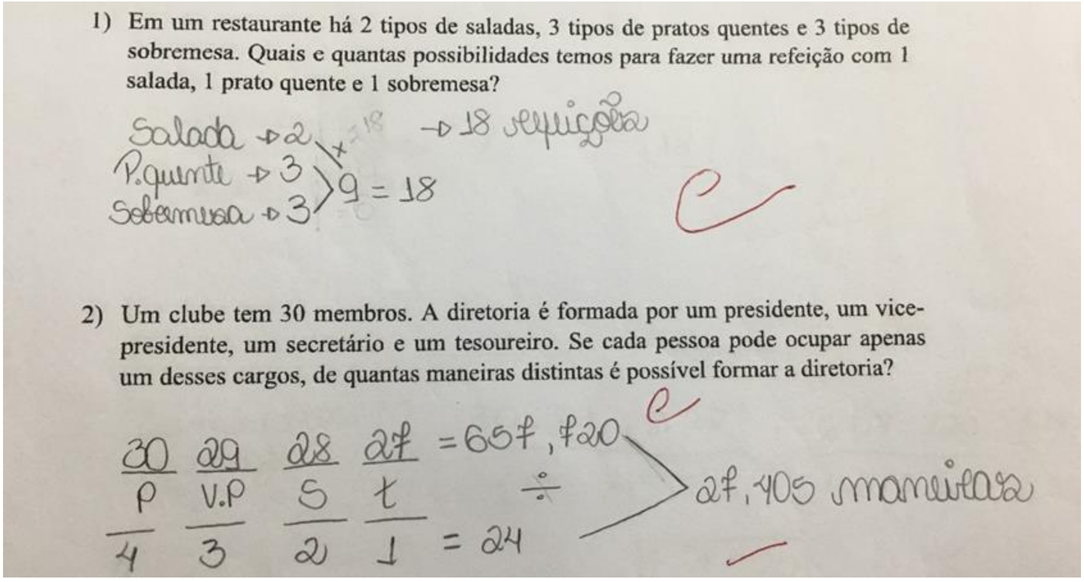
27,524

Fonte: Dados da pesquisa

De modo geral, a maior parte dos alunos desse grupo trataram as questões como o modelo acima. Como se pode observar, esses alunos não demonstraram o uso de nenhuma tática para a resolução, nem mesmo a escrita da fórmula geral que conheceram. Além disso, também não há registro da extração dos dados do enunciado. A falta de todos esses componentes torna impossível a avaliação do passo a passo do desenvolvimento.

Em contrapartida, a maior parte dos alunos do grupo B realizaram resoluções semelhantes à apresentada a seguir:

Imagem 10 – Resolução da questão aberta pelo grupo B


1) Em um restaurante há 2 tipos de saladas, 3 tipos de pratos quentes e 3 tipos de sobremesa. Quais e quantas possibilidades temos para fazer uma refeição com 1 salada, 1 prato quente e 1 sobremesa?

Salada → 2
P.quente → 3
Sobremesa → 3
9 = 18
→ 18 refeições

2) Um clube tem 30 membros. A diretoria é formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Se cada pessoa pode ocupar apenas um desses cargos, de quantas maneiras distintas é possível formar a diretoria?

30 29 28 27 = 657.720
P V.P S T
4 3 2 1 = 24
27.405 maneiras

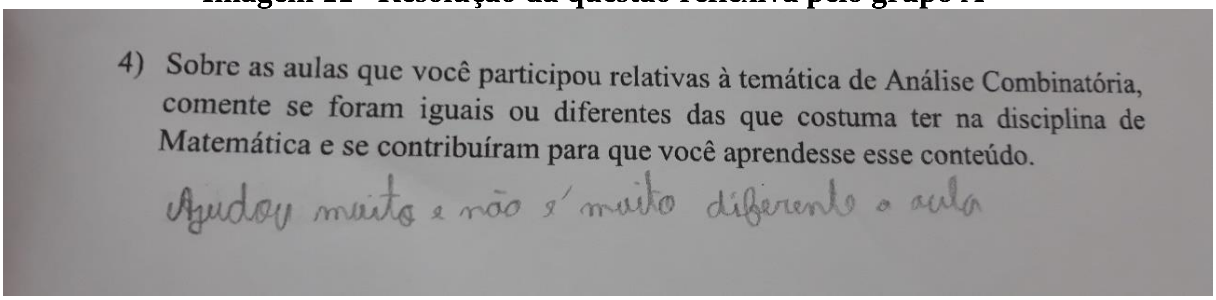
Fonte: Dados da pesquisa

Embora o aluno tenha errado parte da segunda questão, por se confundir sobre as diferenças entre combinação e arranjo, foi possível identificar que esse foi o motivo do erro final devido à sua escrita, estrutura e organização das ideias e estratégias utilizadas. Isso torna possível a análise e avaliação do passo a passo da questão e, além disso, abre caminho para a discussão dos resultados com os discentes.

Portanto, sob uma análise qualitativa das respostas formuladas nessa avaliação, pode-se confirmar que a metodologia de Resolução de Problemas desenvolveu nos alunos a organização de ideias na transcrição do pensamento estratégico para a resolução no papel. Assim, possibilita um entendimento mais claro do percurso utilizado, tanto para quem corrige quanto para o próprio aluno, caso ele precise revisar o conteúdo.

Para a amostragem de opinião dos alunos sobre os modelos de ensino ao qual foram submetidos, a questão reflexiva mostrou resultados interessantes:

Imagem 11 –Resolução da questão reflexiva pelo grupo A

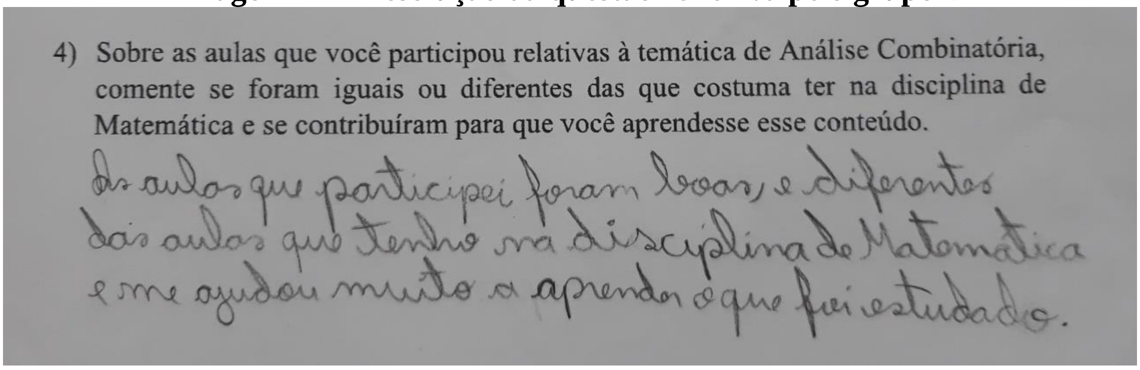

4) Sobre as aulas que você participou relativas à temática de Análise Combinatória, comente se foram iguais ou diferentes das que costuma ter na disciplina de Matemática e se contribuíram para que você aprendesse esse conteúdo.

Ajudou muito e não é muito diferente a aula

Fonte: Dados da pesquisa

Com essa resposta, dada por um aluno que pertencia ao grupo A, pode-se concluir que, quando o jovem diz “não é muito diferente da aula”, implica, diretamente, dizer que o método de ensino Tradicional continua sendo predominante nas salas de aula. Esses alunos não visualizaram diferença entre o modelo de aulas aplicadas a eles no decorrer desta pesquisa e as aulas a que são submetidos em seu cotidiano no ensino regular. Ao passo que, para maioria dos alunos do grupo B, a resposta foi bem distinta:

Imagem 12 – Resolução da questão reflexiva pelo grupo B



4) Sobre as aulas que você participou relativas à temática de Análise Combinatória, comente se foram iguais ou diferentes das que costuma ter na disciplina de Matemática e se contribuíram para que você aprendesse esse conteúdo.

As aulas que participei foram boas, e diferentes das aulas que tenho na disciplina de Matemática e me ajudou muito a aprender o que foi estudado.

Fonte: Dados da pesquisa

Ao se depararem com aulas que fugiram do costume Tradicional, esses alunos, visualmente, se mostraram mais interessados que os demais. Nos relatos, foi evidente que a maioria notou uma diferença das aulas rotineiras de Matemática, e gostaram desse novo modelo de ensino, já que ele trouxe impactos positivos ao seu processo de aprendizagem.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Decorrida toda a aplicação do projeto, considera-se que foi cumprido o objetivo inicial do trabalho, apesar de os resultados não serem discrepantes o suficiente para uma resposta mais incisiva sobre os resultados da pesquisa.

Ao se comparar a aplicação do conteúdo de Análise Combinatória para alunos do 1º ano do Ensino Médio, pode-se afirmar que, no caso particular desse estudo e desconsiderando os demais fatores que influenciam no desenvolvimento do aluno, a metodologia de Resolução de Problemas gerou resultados mais satisfatórios que o modelo de Ensino Tradicional.

Portanto, torna-se necessário modificar a cultura de aula vinculada apenas à memorização de conteúdos, de técnicas algorítmicas de cálculo e resolução de exercícios repetitivos que, muitas vezes, não fornecem subsídios para a aprendizagem dos discentes. Nesse aspecto, é preciso que o professor exercite uma prática diferenciada com seus alunos, que sejam momentos de reflexão e de variação na maneira de pensar, ver e viver a realidade, levando em consideração o grupo social no qual o aluno está inserido.

Segundo essa linha de pensamento, o aprendizado de qualquer conteúdo só tem sentido se proporcionar ao educando algum significado, na perspectiva de que ele será utilizado no dia a dia. É importante fazer com que o sujeito pense nessa informação como parte imprescindível do seu contexto social, e, por isso, as aulas de Matemática devem fazer sentido e ser contextualizadas de acordo com o cotidiano do público-alvo, respeitando-se as características locais e pessoais do grupo.

Desse modo, conclui-se que a metodologia de ensino utilizada pelo professor, de acordo com a pesquisa executada, tem grande potencial para influenciar no desenvolvimento dos alunos. Vale a pena ressaltar, entretanto, que a Resolução de Problemas é só mais uma de várias novas propostas para a educação do nosso tempo, assim como o uso de jogos, modelagem, investigação, metodologia reversa, entre outras. O importante é perceber que se deve romper com a monotonia em sala, tornando as aulas mais atraentes para os alunos. Isso, certamente, trará melhores resultados para nossos índices educacionais em longo prazo.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, C. S. **Dificuldades de aprendizagem em Matemática e a percepção dosprofessores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área.** Disponível em: <http://www.ucb.br/sites/100/103/tcc/12006/cinthiasoaresdealmeida.pdf>. Acesso em: 19 jun. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília, 2000.

BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In: PONTE, J. P.; COSTA, C.; ROSENDO, A. I.; MAIA, E.; FIEGUEIREDO, N.; DIONÍSIO, A. F. **Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**. Lisboa: SEM-SPCE, 2002. p. 5-24.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo: Ática, 1999.

DANTE, L. R. **Matemática:** Contexto e Aplicações. São Paulo: Ática, v.2, p. 242-260, 2014.

DORNELAS, A. B. Resolução de problemas em análise combinatória: um enfoque voltado para alunos e professores do ensino médio. **SBEM: VII Encontro Nacional de Educação Matemática.** Recife, 2004.

FALCÃO, J. T. da R.; RÉGNIER, J. Sobre os métodos quantitativos na pesquisa em ciências humanas: riscos e benefícios para o pesquisador. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**. Brasília, v. 81, n. 198, p. 232, 2007.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002.

GATTI, A. Bernadete. Estudos quantitativos em educação. **Educação e pesquisa**. São Paulo, v. 30, n. 1, p. 11-30, jan./abr. 2004.

GIL, A. C. Métodos e técnicas de pesquisa social. 4. ed. São Paulo: Atlas, 1994.

________. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

LESTER, F.; RANDALL, C. **Teaching Problem Solving:** What, Why & How. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications. 1982.

LUCKESI, C. C. **Filosofia da Educação**. São Paulo: Cortez, 1994.

MINAYO, M. C. S. **O desafio do conhecimento:** pesquisa qualitativa em saúde. 10. ed. São Paulo: Hucitec, 2007.

MINAYO, M. C. S. (Org.). **Pesquisa social:** teoria, método e criatividade. Petrópolis: Vozes, 2001.

MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

MORGADO, A. C. O. et al. **Análise combinatória e probabilidade.** Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Rio de Janeiro, 2004

ONUCHIC, L. R; ALEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. (Org.). **Educação matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções e Perspectivas. São Paulo: Ed. UNESP, 1999.

PÓLYA, George. **Como resolver problemas** (Tradução do original inglês de 1945). Lisboa: Gradiva, 2003.

POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J. I. (org.). **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998, p. 13-42.

VILA, A.; CALLEJO, M. L. **Matemática para aprender a pensar**: o papel das crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2006. 212 p.

APÊNDICES

APÊNDICE A – AVALIAÇÃO DE AMOSTRAGEM

INSTITUTO FEDERAL
MINAS GERAIS
Campus São João Evangelista

Atividade de Pesquisa de Campo como parte integrante do Trabalho de Conclusão de Curso –TCC, intitulada “O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DA APLICAÇÃO DE DUAS DIFERENTES METODOLOGIAS”.

Todas as questões a seguir foram retiradas dos processos seletivos para os Cursos Técnicos Integrados e Subsequente dos anos 2012, 2013, 2014, 2015 e 2016.

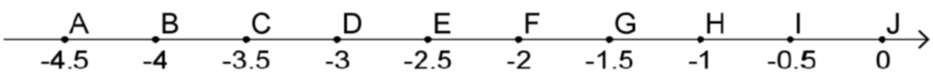
AVALIAÇÃO DE AMOSTRAGEM

Professoras: Daiane Beatriz, Larissa Nunes e Madalena Nunes

Aluno: ____

Turma: __________________ **Data:** ____________________

01) Observe a reta numérica a seguir:



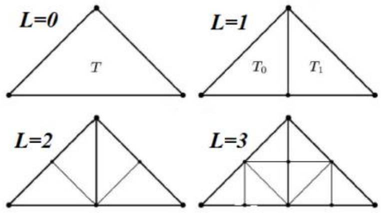
O número racional $-\frac{3}{4}$ está localizado entre os pontos:

A) C e D B) G e H C) H e I D) A e B

02) Sabe-se que num jogo de basquete sempre há um vencedor. Os jogos intercalasses do IFMG reuniram 10 equipes e cada equipe jogou duas vezes contra cada uma das outras equipes. O vencedor de cada partida ganhou dois pontos e o perdedor ganhou um ponto. A equipe campeã venceu 11 dos seus jogos. Quantos pontos essa equipe marcou?

A) 22 B) 29 C) 33 D) 35

03) Observando a figura a seguir, o triângulo T está se subdividindo em triângulos menores, T_0 e T_1, de acordo com uma regularidade. Seguindo o padrão, o triângulo T estará dividido em quantos triângulos menores para L= 5?



(Fonte: http://galacticcraft.wordpress.com/category/experimentos/. Acesso em: 27/11/2012.)

A) 16 B) 20 C) 24 D) 32

04) Uma vela de 20cm de altura queima constantemente, a uma razão de 4 centímetros a cada 15 minutos. Qual a altura da vela 2 horas depois de começar a queimar?

A) 0 B) 4 C) 8 D) 12

05) Em cada linha do quadro abaixo, a terceira coluna é o produto dos termos das duas colunas anteriores:

3	6	18
2	5	**A**
B	4	12
9	**C**	0
D	**D**	25

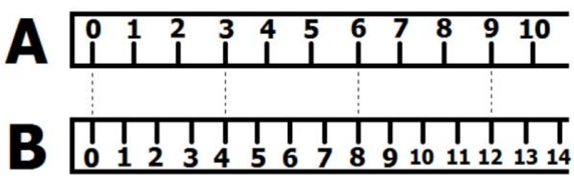
Quanto vale A + B + C + D?

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18

06) Um estudante sai de casa e vai à escola. No recreio ele, gasta em um lanche, $\frac{1}{6}$ do que tem na carteira. Gasta $\frac{1}{5}$ do que possuía inicialmente em uma papelaria, ao comprar um caderno, e ainda lhe sobram R$19,00. A quantia que esse estudante tinha, inicialmente, na carteira era:

A) R$ 25,00 B) R$ 27,00 C) R$ 30,00 D) R$ 35,00

07) As figuras a seguir mostram duas réguas com escalas diferentes:



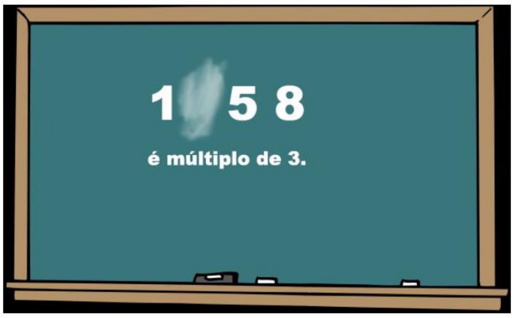
Utilizando a régua A um aluno encontrou 87 unidades de distâncias entre dois pontos. Quantas unidades encontraria se medisse a mesma distância utilizando a régua B?

A) 88 B) 100 C) 116 D) 140

08) Qual o valor da expressão numérica $\frac{12^0 + 5^2 - (5-1)^2}{4-2}$?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8

09) Ao entrar na sala de aula, Cláudio olhou para a lousa, conforme a figura, e viu que um algarismo do número escrito pela professora de Matemática foi apagado. A turma o informou que o algarismo apagado era par e tornava a afirmativa verdadeira. Cláudio percebeu que esta informação era suficiente para ele descobrir o número.



Qual algarismo foi apagado?

A) 2 B)4 C) 6 D) 8

10) Qual o valor da expressão $8 \cdot \sqrt{t-6}$ quando $t = 10$?

A) 16 B) 32 C) 48 D) 64

APÊNDICE B – PLANO DE AULA I – MÉTODO TRADICIONAL

PLANO DE AULA I – MÉTODO TRADICIONAL

Professoras: Daiane Beatriz, Larissa Nunes e Madalena Nunes
Disciplina: Matemática
Nível/Série: 1º ano
Tempo estimado: 2 horas/aula

TEMA: O Método Tradicional no ensino de Análise Combinatória.

OBJETIVOS
GERAL: **Apresentar os conceitos básicos da Análise Combinatória através do modelo Tradicional de ensino.**
ESPECÍFICOS: • Introduzir o estudo formal do campo da Análise Combinatória;   • Apresentar alguns dos principais tipos de problemas a serem estudados na Análise Combinatória;   • Definir e introduzir o uso do operador fatorial;   • Definir conceito dos princípios aditivo e multiplicativo;   • Exibir fórmulas e/ou padronizações para resolver exercícios;   • Estimular a memorização, repetição e treinamento na aprendizagem.

JUSTIFICATIVAS PARA A ABORDAGEM DO CONTEÚDO/QUESTÕES
Na atualidade os números estão presentes em todos os segmentos, no dia-a-dia para quantificar coisas, no comércio, na arquitetura e nas engenharias, assim como em tantas outras profissões explicitamente. Na tecnologia através de infinitos códigos de programação que coordenam todo sistema.   Tratando-se do aluno especificamente, podemos dizer que a compreensão dos números é a base para toda a longa matemática que será demonstrada ao longo da vida

acadêmica. Os conceitos, definições, significados, diferenças e representações dos números e das suas operações são conteúdos básicos e mínimos para articulação e desenvolvimento matemático não só na sala de aula bem como no dia a dia, por isso a importância da sua aprendizagem.

Assim, já que a Análise Combinatória é o ramo da Matemática responsável pelo estudo de critérios para a contagem do número possível de agrupamentos distintos formados a partir de uma amostra discreta, sua aprendizagem torna-se crucial para o aprendizado e resolução de técnicas e problemas de contagem.

Além disso, tem-se em vista que este conteúdo compreende um amplo campo investigativo, com intensa atividade devido às suas inúmeras aplicações nas mais diversas áreas.

METODOLOGIA DE ENSINO

Num panorama total pode-se dizer que a aula será extritamente regida sob o método de ensino Tradicional, com professoras a frente conduzindo a aula de forma expositiva enquanto os alunos permanencem em filas indianas trabalhando individualmente.

O ensino do conteúdo se dará por meio da aplicação direta de fórmulas e/ou padronizações afim de estimular a memorização com a repetição para solucionar os problemas, já que estes normalmente apresentam enunciados com propostas semelhantes.

Nesse contexto, Morgado et al (1991) conclui que

> A aprendizagem dos conceitos se faz de maneira mecânica, limitando se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a análise combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas. (MORGADO et al, 1991, p.3)

Filosoficamente, esse método de ensino está ligado a Tendência Liberal Tradicional, na qual o processo é mais centrado no professor, que exige do aluno uma aplicação direta da informação fornecida em um domínio restrito e manifestam-se desde as escolas confessionais (Igreja) até a maioria dos dias de hoje. Segundo Luckesi (1994), os métodos dessa tendência baseiam-se na exposição verbal da matéria e/ou demonstração. Tanto a exposição quanto a análise são feitas pelo professor.

Luckesi (1994) ainda descreve cinco passos a serem desenvolvidos neste ensino aplicado pelo professor:

a) Preparação do aluno (definição do trabalho, recordação da matéria anterior, despertar interesse);

b) Apresentação (realce de pontos-chaves, demonstração);

c) Associação (combinação do conhecimento novo com o já conhecido por comparação e abstração);

d) Generalização (dos aspectos particulares chega-se ao conceito geral, é a exposição sistematizada);

e) Aplicação (explicação de fatos adicionais e/ou resoluções de exercícios).

A ênfase nos exercícios, na repetição de conceitos ou fórmulas na memorização visa disciplinar a mente e formar hábitos. (LUCKESI, 1994, p. 56).

RECURSOS DIDÁTICOS
Quadro, lápis, borracha e computador

DESENVOLVIMENTO

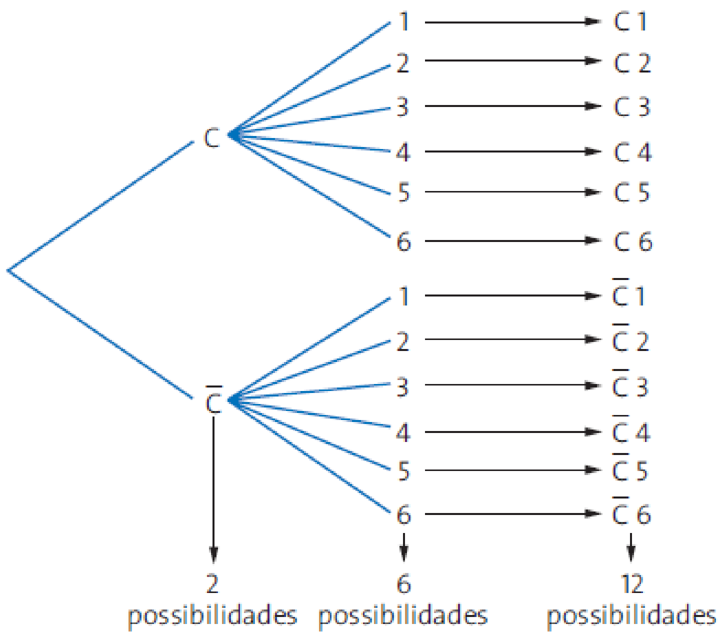
- **PRIMEIRO ENCONTRO:**

A aula será iniciada expositivamente com o repasse das definições e conceitos do conteúdo de Análise Combinatória, seguidos de um exemplo básico para associação do tema.

1) O Princípio Fundamental da Contagem (PFC):

Definição: se um evento é composto de duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na 1a etapa é m e para cada possibilidade da 1ª etapa o número de possibilidades na 2ª etapa é n, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto **m x n**.

Exemplo 1: Ao lançarmos uma moeda e um dado, temos as seguintes possibilidades para o resultado (sendo C: cara e Ĉ: coroa).



Com o diagrama da árvore pode-se observar que o evento tinha duas etapas, com 2 possibilidades em uma e 6 possibilidades em outra, totalizando 12 possibilidades (2x6=12).

Exemplo 2:

a) Quantos números naturais entre 5 000 e 10 000 podemos formar com os algarismos 1, 2, 4 e 6?

b) Quantos números naturais de algarismos distintos entre 5 000 e 10 000 podemos formar com os algarismos 1, 2, 4 e 6?

2) Permutação Simples:

Definição: são agrupamentos ordenados, no qual indica-se por $\mathbf{P_n}$ o número de permutações simples de **n** elementos. De modo geral, se temos **n** elementos distintos, quantas filas podemos formar? Podemos escolher o primeiro elemento da fila de **n** maneiras. Agora, de quantas maneiras podemos escolher o segundo elemento da fila? De **n – 1** maneiras. Prosseguindo dessa forma e usando o princípio multiplicativo, fica claro que o número de agrupamentos ordenados que podemos obter com todos esses **n** elementos é dado por:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

2.1) Fatorial:

Definição: O valor obtido com Pn é também chamado fatorial do número natural n e indicado por n! (lê-se “fatorial de n” ou “n fatorial”). Assim, temos:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \ \cdot 2 \cdot 1$$

Observações: pode-se escrever: $n! = n \cdot (n-1)!$

Resumindo:

$$P_n \ = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Exemplo 1:

De quantas maneiras uma família de 5 pessoas pode se sentar em um banco de 5 lugares para tirar uma foto?

________ ________ ________ ________ ________

5 · 4 · 3 · 2 · 1

Exemplo 2:

Quantos são os anagramas (diferentes disposições das letras de uma palavra) da palavra ANEL?

$\underline{\text{a, n, e, l}}$ $\underline{\text{n, e, l}}$ $\underline{\text{e, l}}$ $\underline{\text{l}}$.

4 3 2 1

Por fim, dada toda a explicação será aplicado uma lista de exercícios para fixação do conteúdo.

- **SEGUNDO ENCONTRO:**

Assim como a primeira aula, esta também será iniciada expositivamente com o repasse das definições e conceitos do conteúdo de Análise Combinatória, seguidos de um exemplo básico para associação do tema.

Relembrando: vimos que permutação simples de **n** elementos é qualquer agrupamento ordenado desses **n** elementos. Agora, tendo **n** elementos, vamos estudar os agrupamentos ordenados de 1 elemento, de 2 elementos, de 3 elementos, ..., de **p** elementos, com $p < n$.

3) Arranjos:

Definição: são os agrupamentos ordenados diferentes que se podem formar com **p** dos **n** elementos dados. Indica-se por A_n, o total desses agrupamentos, que calculamos assim:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exemplo 1:

Aplicando a fórmula para $A_{4,2}$, temos:

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$$

Exemplo 2:

De quantas maneiras 5 meninos podem se sentar em um banco que tem apenas 3 lugares?

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

4) Combinação:

Definição: o conceito de Combinação está intuitivamente associado à noção de escolher subconjuntos. Os subconjuntos, de um conjunto, em que a ordem dos elementos não é importante Diferente dos Arranjos, no qual a ordem é de importância. Indica-se por $C_{n,p}$, o número total de combinações de **n** elementos tomados **p** a **p** e calcula-se por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Exemplo 1:

Utilizando a fórmula para $C_{6,3}$, temos:

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot (3)!} = \frac{120}{6} = 20$$

Exemplo 2:

Em uma prova de 10 questões, o aluno deve resolver apenas 8. De quantas maneiras diferentes ele poderá escolher essas 8 questões?

$$C_{10,8} = \frac{10!}{8!\,(10-8)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 2!} = \frac{90}{2} = 45$$

Por fim, dada toda a explicação será aplicado uma lista de exercícios para fixação do conteúdo.

REFERÊNCIAS
• DANTE, L. R. **Matemática:** Contexto e Aplicações, Vol.2, p. 242-260, Ática, 2014. • MORGADO, A. C. O. et al. Análise combinatória e probabilidade. Coleção Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Rio de Janeiro, 2004

APÊNDICE C – PLANO DE AULA II – RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

PLANO DE AULA II – RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Professoras: Larissa Nunes, Daiane Beatriz e Madalena Nunes
Disciplina: Matemática
Nível/Série: 1º ano
Tempo estimado: 2 horas/aula

TEMA: Resolução de Problemas no ensino de Análise Combinatória.

OBJETIVOS
GERAL: **Apresentar os conceitos básicos da Análise Combinatória através da Resolução de Problemas**.
ESPECÍFICOS: • Introduzir o estudo formal do campo da Análise Combinatória; • Apresentar alguns dos principais tipos de problemas a serem estudados na Análise Combinatória; • Definir e introduzir o uso do operador fatorial; • Definir conceito dos princípios multiplicativo; • Discutir algumas técnicas de Resolução de Problemas combinatórios.

JUSTIFICATIVAS PARA A ABORDAGEM DO CONTEÚDO/QUESTÕES
Na atualidade os números estão presentes em todos os segmentos, no dia-a-dia para quantificar coisas, no comércio, na arquitetura e nas engenharias, assim como em tantas outras profissões explicitamente. Na tecnologia através de infinitos códigos de programação que coordenam todo sistema. Tratando-se do aluno especificamente, podemos dizer que a compreensão dos números é a base para toda a longa matemática que será demonstrada ao longo da vida acadêmica. Os conceitos, definições, significados, diferenças e representações dos números

e das suas operações são conteúdos básicos e mínimos para articulação e desenvolvimento matemático não só na sala de aula bem como no dia a dia, por isso a importância da sua aprendizagem.

Assim, já que a Análise Combinatória é o ramo da Matemática responsável pelo estudo de critérios para a contagem do número possível de agrupamentos distintos formados a partir de uma amostra discreta, sua aprendizagem torna-se crucial para o aprendizado e resolução de técnicas e problemas de contagem.

Além disso, tem-se em vista que este conteúdo compreende um amplo campo investigativo, com intensa atividade devido às suas inúmeras aplicações nas mais diversas áreas.

METODOLOGIA DE ENSINO

A aula será ministrada com os alunos em um grupo, o que é algo defendido na resolução: o conceito do ensino cooperativo, já que este contribui para que os alunos cooperem entre si como elementos de um grupo e cada grupo com o professor, como podemos observar na imagem abaixo, de Arzt (1991 apud AZEVEDO, 2002, p.95).

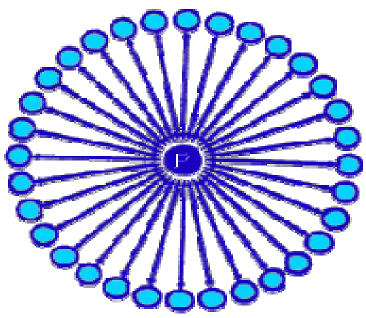


Fig. A
Sala de aula em ensino centrado no professor

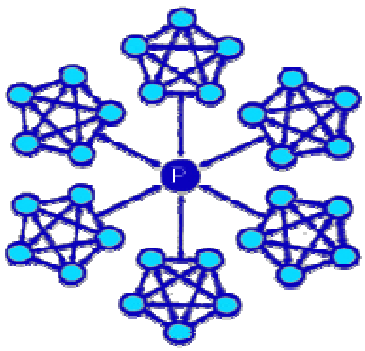


Fig. B
Sala de aula em ensino cooperativo

A resolução das atividades será embasada na Teoria da Resolução de Problemas segundo Pólya (1887-1985), de acordo com as quatro fases propulsoras ao que se refere ao processo de resolver problemas matemáticos, sendo elas:

1) Compreensão do problema;
2) Criação de um plano;
3) Execução do mesmo;
4) Revisão do problema original.

A discussão das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das questões levará a definição formal dos conceitos apresentados dentro do conteúdo dos problemas combinatórios

RECURSOS DIDÁTICOS
Quadro, lápis, borracha e computador

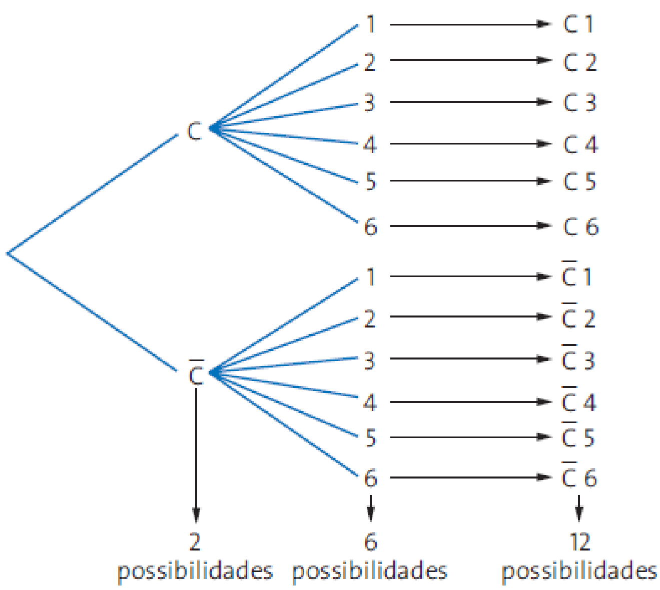
DESENVOLVIMENTO

- **PRIMEIRO ENCONTRO:**

Como mencionado a aula será ministrada com os alunos em grupos, numa proposta dinâmica para debate e discussão dos dados e das resoluções, partindo de uma questão motivadora que instigue os alunos. Feito isso, concluiremos o conteúdo e suas definições.

1) Atividade motivacional: Ao lançarmos uma moeda e um dado, quais as possíveis possibilidades para o resultado (sendo C: cara e Ĉ: coroa)?

Após as resoluções dos grupos e troca de informações será apresentado o Diagrama da Árvore como possível resolução para o problema:



Atividade:

a) Quantos números naturais entre 5 000 e 10 000 podemos formar com os algarismos 1, 2, 4 e 6?

b) Quantos números naturais de algarismos distintos entre 5 000 e 10 000 podemos formar com os algarismos 1, 2, 4 e 6?

Conclusão: **O Princípio Fundamental da Contagem (PFC):**

Definição: se um evento é composto de duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na 1ª etapa é m e para cada possibilidade da 1ª etapa o número de possibilidades na 2ª etapa é n, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto **m x n**.

2) Atividade motivacional:

De quantas maneiras uma família de 5 pessoas pode se sentar em um banco de 5 lugares para tirar uma foto?

Após as resoluções dos grupos e troca de informações será apresentado o esquema de “filas” utilizando os espaços com a relação de vaga por possibilidades.

_______ _______ _______ _______ _______

5 · 4 · 3 · 2 · 1

Atividade:

Quantos são os anagramas (diferentes disposições das letras de uma palavra) da palavra ANEL?

Resumindo: de modo geral, se temos **n** elementos distintos, quantas filas podemos formar? Podemos escolher o primeiro elemento da fila de **n** maneiras. Agora, de quantas maneiras podemos escolher o segundo elemento da fila? De **n – 1** maneiras. Prosseguindo dessa forma e usando o princípio multiplicativo, fica claro que o número de agrupamentos ordenados que podemos obter com todos esses **n** elementos é dado por:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Conclusão 1: **Permutações Simples**.

Definição: São agrupamentos ordenados (diferem pela ordem), no qual indicamos por P_n o número de permutações simples de **n** elementos:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Conclusão2: **Fatorial**

Definição: O valor obtido com P_n é também chamado Fatorial do número natural n e indicado por **n!** (lê-se “fatorial de n” ou “n fatorial”). Assim, temos:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \text{ para } n > 1.$$

Observações: considera-se $0! = 1$ e pode-se escrever: $n! = n \cdot (n-1)!$

Na prática isso implica em:

$$P_n = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Por fim, feito a retrospectiva e conclusão do conteúdo será passado para os alunos algumas questões problemas para que possam analisar a semelhança para efetuarem a resolução e aplicarem o aprendizado.

- **SEGUNDO ENCONTRO:**

Assim como no primeiro encontro a aula será ministrada com os alunos sentados em grupos, numa proposta dinâmica para debate e discursão dos dados e das resoluções, partindo de uma questão motivadora que instigue os alunos. Feito isso, concluiremos o conteúdo e suas definições.

3) Atividade motivacional: de quantas maneiras 5 meninos podem se sentar em um banco que tem apenas 3 lugares?

Lembrando: vimos que permutação simples de **n** elementos é qualquer agrupamento ordenado desses **n** elementos. Agora, tendo **n** elementos, vamos estudar os agrupamentos ordenados de 1 elemento, de 2 elementos, de 3 elementos, ..., de p elementos, com p < n

Conclusão: **Arranjos**

Definição: agrupamentos ordenados diferentes que se podem formar com **p** dos **n** elementos dados. Indica-se por $A_{n,p}$, o total desses agrupamentos, que calculamos assim:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Aplicando a fórmula para $A_{4,2}$, por exemplo, temos:

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$$

4) Atividade motivadora: em uma prova de 10 questões, o aluno deve resolver apenas 8. De quantas maneiras diferentes ele poderá escolher essas 8 questões?

Analisando uma situação: se quisermos saber quantas duplas podemos fazer com 5 jogadores de vôlei, não podemos usar Arranjos, pois em uma dupla o que importa é a natureza (os jogadores devem ser diferentes) e não a ordem, ou seja, a dupla João e José é a mesma dupla que José e João, por isso não devemos contá-la

Conclusão: **Combinação**

Definição: o conceito de Combinação está intuitivamente associado à noção de escolher subconjuntos. Os subconjuntos, de um conjunto, em que a ordem dos elementos não é importante Diferente dos Arranjos, no qual a ordem é de importância. Indica-se por $C_{n,p}$, o número total de combinações de **n** elementos tomados **p** a **p** e calcula-se por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Aplicando a fórmula para $C_{6,3}$, por exemplo, temos:

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot (3)!} = \frac{120}{6} = 20$$

Por fim, feito a retrospectiva e conclusão do conteúdo será passado para os alunos algumas questões problemas para que possam analisar a semelhança para efetuarem a resolução e aplicarem o aprendizado.

REFERÊNCIAS

- DANTE, L. R. **Matemática:** Contexto e Aplicações, Vol.2, p. 242-260, Ática, 2014.
- DORNELAS, A. B. **Resolução de problemas em análise combinatória:** um enfoque voltado para alunos e professores do ensino médio, p. 6, 2004.
- PÓLYA, George. (2003). Como resolver problemas (Tradução do original inglês de 1945). Lisboa: Gradiva.

APÊNDICE D – 1ª AVALIAÇÃO OBJETIVA

INSTITUTO FEDERAL
MINAS GERAIS
Campus São João Evangelista

Atividade de Pesquisa de Campo como parte integrante do Trabalho de Conclusão de Curso –TCC, intitulada "O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DA APLICAÇÃO DE DUAS DIFERENTES METODOLOGIAS".

Todas as questões a seguir foram retiradas do livro didático Dante. Matemática: Contexto e Aplicações (2014).

1ª AVALIAÇÃO OBJETIVA

Professoras: Daiane Beatriz, Larissa Nunes e Madalena Nunes

Aluno: ____

Turma: _________________ **Data:** ___________________

01) Uma pessoa quer viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo que há 5 roteiros diferentes para chegar a São Paulo partindo de Recife e 4 diferentes para chegar a Porto Alegre partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderá viajar de Recife a Porto Alegre?

a) 9 b) 20 c) 24 d) 30

02) Um casal pretende ter 4 filhos, sendo 2 meninas e 2 meninos, em qualquer ordem de nascimento. Quantas são as ordens possíveis em que podem ocorrer esses 4 nascimentos?

a) 6 b) 8 c) 16 d) 18

03) Dispomos de 5 cores e queremos pintar uma faixa decorativa com 3 listras, cada uma de uma cor. De quantas maneira isso pode ser feito?

a) 10 b) 15 c) 60 d) 120

04) Em um ônibus há 5 lugares vagos. Duas pessoas entram no ônibus. De quantas maneiras diferentes elas podem se sentar?

a) 5 b)10 c) 12 d) 20

05) Em uma competição com 10 países, de quantas maneiras podem ser distribuídas as medalhas de ouro, prata e bronze?

a) 720 b) 800 c) 850 d)900

06) Usando os algarismos 5, 6, e 8, quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

a) 2 b) 6 c) 8 d) 10

07) Em um sofá há lugares para 4 pessoas. De quantas maneiras diferentes podem se sentar 6 pessoas?

a) 360 b) 380 c) 400 d) 450

08) Um estudante tem 6 lápis de cores diferentes. De quantas maneiras ele poderá pintar os estados da região Sudeste do Brasil (São Paulo, Rio de Janeiro, Minas Gerais e Espirito Santo), cada um de uma cor?

a) 200 b) 350 c) 360 d) 400

09) Quantos anagramas tem a palavra BANANA?

10) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra FILHO?

APÊNDICE E – 2ª AVALIAÇÃO OBJETIVA

INSTITUTO FEDERAL
MINAS GERAIS
Campus São João Evangelista

Atividade de Pesquisa de Campo como parte integrante do Trabalho de Conclusão de Curso –TCC, intitulada “O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DA APLICAÇÃO DE DUAS DIFERENTES METODOLOGIAS”.

Todas as questões a seguir foram retiradas de avaliações externas: processo seletivo ou ENEM.

2ª AVALIAÇÃO OBJETIVA

Professoras: Daiane Beatriz, Larissa Nunes e Madalena Nunes

Aluno: ____

Turma: _________________ **Data:** ___________________

01) (UFJF-MG) Temos sete cores distintas e queremos pintar um painel com quatro listras, cada listra de uma cor diferente. O número de maneiras com que isto pode ser feito é:

a) 35 b) 840 c) 2401 d) 16384

02) (Cesgranrio) Durante a Copa do Mundo, que foi disputada por 24 países, as tampinhas de Coca-Cola traziam palpites sobre os países que se classificariam nos três primeiros lugares (por exemplo: 1º lugar, Brasil; 2º lugar, Nigéria; 3º lugar, Holanda). Se, em cada tampinha, os três países são distintos, quantas tampinhas diferentes poderiam existir?

a) 69 b) 2024 c) 9562 d) 12144 e)13824

03) (UFRJ) Um construtor dispõe de quatro cores (verde, amarelo, cinza e bege) para pintar cinco casas dispostas lado a lado. Ele deseja que cada casa seja pintada com apenas uma cor e que duas casas consecutivas não possuam a mesma cor. Por exemplo, duas possibilidades diferentes de pintura seriam:

Determine o número de possibilidades diferentes de pintura.

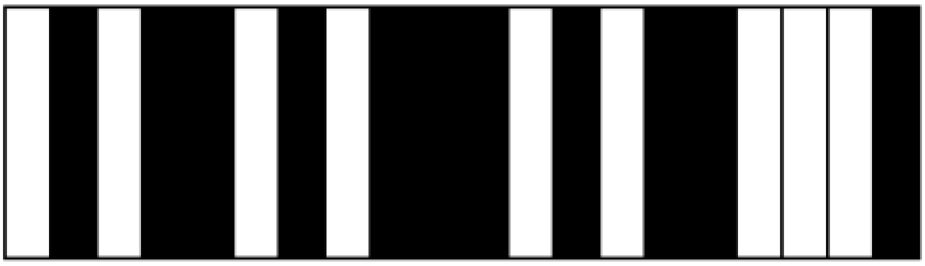
04) (Enem) Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta corrente pela internet. Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9.

Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres. Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo.

O coeficiente de melhora da alteração recomendada é:

a) $\frac{62^6}{10^6}$ b) $\frac{62!}{10!}$ c) $\frac{62!\cdot 4!}{10!\cdot 56!}$ d) $62! - 10!$ e) $62^6 - 10^6$

05) (Enem) O código de barras, contido na maior parte dos produtos industrializados, consiste num conjunto de várias barras que podem estar preenchidas com cor escura ou não. Quando um leitor óptico passa sobre essas barras, a leitura de uma barra clara é convertida no número 0 e a de uma barra escura, no número 1. Observe a seguir um exemplo simplificado de um código em um sistema de código com 20 barras.



Se o leitor óptico for passado da esquerda para a direita irá ler: 01011010111010110001 Se o leitor óptico for passado da direita para a esquerda irá ler: 10001101011101011010. No sistema de código de barras, para se organizar o processo de leitura óptica de cada código, deve-se levar em consideração que alguns códigos podem ter leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, como o código 00000000111100000000, no sistema descrito acima. Em um sistema de códigos que utilize apenas cinco barras, a quantidade de códigos com leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, desconsiderando-se todas as barras claras ou todas as escuras, é:

a) 14 b) 12 c) 8 d) 6 e) 4

06) (Enem) Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos, distribuídas conforme a tabela a seguir:

GRUPOS TAXONÔMICOS	NÚMERO DE ESPÉCIES
Artiodáctilos	4
Carnívoros	18
Cetáceos	2
Quirópteros	103
Lagomorfos	1
Marsupiais	16
Perissodáctilos	1
Primatas	20
Roedores	33

Sirênios	1
Edentados	10
TOTAL	209

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três dessas espécies de mamíferos - um grupo de cetáceos, outra do grupo primatas e a terceira do grupo de roedores. O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a:

a) 1320 b) 2090 c) 5845 d) 6600 e) 7245

07) (Unioeste-PR) Quantas palavras podemos formar, independente se tenham sentido ou não, com as 9 letras da palavra BORBOLETA?

a) 81440 b) 90720 c) 362880 d) 358140 e) 181440

08) (UFMG) Um aposentado realiza diariamente, de segunda a sexta-feira, estas cinco atividades:

I. Leva seu neto Pedrinho, às 13:00 horas para a escola;
II. Pedala 20 minutos na bicicleta ergométrica;
III. Passeia com o cachorro da família;
IV. Pega seu neto Pedrinho, às 17:00 horas na escola;
V. Rega as plantas do jardim de sua casa.

Cansado, porém, de fazer essas atividades sempre na mesma ordem, ele resolveu que, a cada dia, vai realiza-las em uma ordem diferente. Nesse caso, o número de maneiras **POSSÍVEIS** de ele realizar essas cinco atividades em ordem diferentes é:

a) 24 b) 60 c) 72 d)120

09) (UFSM-RS) As doenças cardiovasculares aparecem em primeiro lugar entre as causas de morte no Brasil. As cirurgias cardíacas são alternativas bastante eficazes no tratamento dessas doenças. Supõe-se que um hospital dispõe de 5 médicos cardiologistas, 2 médicos anestesistas e 6 médicos instrumentadores que fazem parte do grupo de profissionais habilitados para realizar cirurgias cardíacas.

Quantas equipes diferentes podem ser formadas com 3 cardiologistas, 1 anestesista e 4 instrumentadores?

a) 200 b) 300 C) 600 d) 720 e) 1200

10) (Enem) Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o grupo A. Em seguida, entre os times do grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo e o segundo seria o time visitante.

A quantidade total de escolhas possíveis para o grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de:

a) uma combinação e um arranjo, respectivamente
b) Um arranjo e uma combinação respectivamente
c) um arranjo e uma permutação, respectivamente
d) duas combinações
e) dois arranjos

APÊNDICE F – AVALIAÇÃO DISCURSIVA

INSTITUTO FEDERAL
MINAS GERAIS
Campus São João Evangelista

Atividade de Pesquisa de Campo como parte integrante do Trabalho de Conclusão de Curso –TCC, intitulada "O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DA APLICAÇÃO DE DUAS DIFERENTES METODOLOGIAS".

AVALIAÇÃO DISCURSIVA

Professoras: Daiane Beatriz, Larissa Nunes e Madalena Nunes

Aluno: ____

Turma: _________________ **Data:** ___________________

1) Em um restaurante há 2 tipos de saladas, 3 tipos de pratos quentes e 3 tipos de sobremesa. Quais e quantas possibilidades temos para fazer uma refeição com 1 salada, 1 prato quente e 1 sobremesa?

2) Um clube tem 30 membros. A diretoria é formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Se cada pessoa pode ocupar apenas um desses cargos, de quantas maneiras distintas é possível formar a diretoria?

3) De quantas maneiras distintas podemos colocar 10 bolas em 3 urnas, de modo que fiquem duas bolas na primeira urna, 3 bolas na segunda urna e 5 bolas na terceira urna?

4) Sobre as aulas que você participou relativas à temática de Análise Combinatória, comente se foram iguais ou diferentes das que costuma ter na disciplina de Matemática e se contribuíram para que você aprendesse esse conteúdo.

APÊNDICE G – TCLE ASSINATURA DOS PAIS

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TCLE

Firmam o presente Termo de Compromisso Livre e Esclarecido, para a realização das atividades relativas à pesquisa intitulada "**O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DA APLICAÇÃO DE DUAS DIFERENTES METODOLOGIAS**", com os alunos do 1º Ano do Ensino Médio, da Escola Estadual "Josefina Pimenta" e seus Pais ou Responsáveis Legais, ficando estabelecido:

1) Eu, ____, ( ) Mãe/Pai ou ( ) Responsável, autorizo meu filho(a)____ a participar das atividades da pesquisa proposta, denominada "UMA ANÁLISE COMPARATIVA DE MODELOS DE ENSINO APLICADO À ANÁLISE COMBINATÓRIA". Estou ciente da sua participação nesta pesquisa, no período de Setembro a Novembro de 2018, bem como autorizo para fins acadêmicos o uso dos resultados da mesma.

2) Nós, **DAIANE BEATRIZ COSTA, LARISSA NUNES MARTINS e MADALENA NUNES LOPES**, alunas do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Minas Gerais – *Campus* São João Evangelista, nos comprometemos a realizar a pesquisa, baseando-nos na ética e nas boas relações humanas. Comprometemos ainda zelar pelas produções e imagens dos participantes e pela privacidade da identidade dos mesmos na divulgação dos resultados.

São João Evangelista, _____ de setembro de 2018.

____

____

____

Responsáveis pela execução da pesquisa

____

Mãe/Pai ou Responsável Legal

APÊNDICE H – TCLE ASSINATURA DA DIRETORA

TERMO DE CONSENTIMENTO

Aos cuidados da Escola Estadual Josefina Pimenta
Diretora: Silvana Aparecida da Silva

As pesquisadoras **DAIANE BEATRIZ COSTA, LARISSA NUNES MARTINS e MADALENA NUNES LOPES**, discentes do IFMG - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – *Campus* São João Evangelista, curso de Licenciatura em Matemática, solicitam autorização para a realização de uma pesquisa de campo, parte integrante do nosso Trabalho de Conclusão de Curso – TCC, intitulada "**O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DA APLICAÇÃO DE DUAS DIFERENTES METODOLOGIAS**", na referida escola, situada na cidade de São João Evangelista, Minas Gerais.

Por meio dessa proposta de pesquisa, que consiste em um estudo quantitativo sobre o processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, pretendemos desenvolver, aplicar e validar, em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio, uma sequência didática tendo como base o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) para introduzir alguns elementos básicos de Análise Combinatória e, como metodologia, abordar o ensino-aprendizagem de Matemática por meio da Resolução de Problemas e pelo Método Tradicional de ensino, visando comparar a viabilidade dos procedimentos utilizados.

Após o estudo, será realizada uma avaliação diagnóstica e um ensaio estatístico para analisar se algum desses métodos trabalhados, aplicados no ensino de Análise Combinatória, apresentou melhores resultados quantitativo na avaliação diagnóstica, através de um teste comparativo de médias.

Desta maneira, contamos com o apoio da escola e dos professores de Matemática, de modo a permitir a aplicação das aulas em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio no período de aula matutino. Devemos esclarecer que a participação nesse estudo é voluntária e **não prevê qualquer tipo de remuneração** para qualquer uma das partes. Caso a escola decida por não participar da pesquisa ou **caso queira desistir em qualquer momento**, tem absoluta liberdade de fazê-lo.

É importante ressaltar que os pesquisadores se comprometem em zelar pela privacidade da identidade dos discentes participantes; em utilizar os materiais e as informações obtidas no desenvolvimento desta pesquisa apenas para fins pedagógicos e científicos; em tornar público os resultados da pesquisa (quer sejam favoráveis ou não), não havendo qualquer acordo restritivo à divulgação; em zelar pelos materiais/dados obtidos ao final da pesquisa, que depois de disseminados, serão arquivados.

Auxiliados pelos profissionais da escola, os discentes responsáveis pela pesquisa, dentro dos seus limites, se comprometem a aplicar todas as aulas na mesma direção. A escola precisa ser esclarecida a respeito dos imprevistos e demais desafios que a aplicação das aulas pode gerar, e trabalharmos aliados para solucionar qualquer empecilho que possa aparecer.

Quaisquer dúvidas relativas à pesquisa inerentes aos alunos pesquisadores poderão ser esclarecidas com o coordenador do Projeto de Conclusão de Curso, Prof. Ms. Wálmisson Régis de Almeida, pelo seu e-mail institucional: walmisson.almeida@ifmg.edu.br.

CONSENTIMENTO PÓS-ESCLARECIDO

Eu, abaixo assinado, **DIRETOR(A) DESTA INSTITUIÇÃO**, concordo na participação dos alunos do 1º Ano do Ensino Médio na pesquisa de Trabalho De Conclusão De Curso, intitulada "**O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DA APLICAÇÃO DE DUAS DIFERENTES METODOLOGIAS**", tendo sido devidamente informado(a) e esclarecido(a) sobre os propósitos deste estudo, os procedimentos a serem realizados e as garantias de confidencialidade das informações por ele fornecidas.

Foi-me garantido que a participação é voluntária e que poderei retirar meu consentimento a qualquer tempo, antes ou durante o desenvolvimento da entrevista, sem penalidades ou prejuízos para a minha pessoa.

São João Evangelista, ____ de setembro de 2018.

Diretora da E.E. Josefina Pimenta

Responsáveis pela execução da pesquisa