INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MINAS GERAIS CAMPUS SÃO JOÃO EVANGELISTA

ARLISON FERNANDES DOS SANTOS; EMILSON JÚNIO NOGUEIRA ARAÚJO; WEMERSON JOSÉ SILVA

O PROCESSO DE FORMALIZAÇÃO DOS CONCEITOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA A PARTIR DA ELABORAÇÃO E APLICAÇÃO DE UMA CARTILHA

SÃO JOÃO EVANGELISTA - MG
2015

ARLISON FERNANDES DOS SANTOS; EMILSON JÚNIO NOGUEIRA ARAÚJO; WEMERSON JOSÉ SILVA

O PROCESSO DE FORMALIZAÇÃO DOS CONCEITOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA A PARTIR DA ELABORAÇÃO E APLICAÇÃO DE UMA CARTILHA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Minas Gerais – Campus São João Evangelista como exigência parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Silvino Domingos Neto

SÃO JOÃO EVANGELISTA - MG
2015

FICHA CATALOGRÁFICA

S237p
2015

Santos, Arlison Fernandes dos

O processo de formalização dos conceitos de geometria analítica a partir da elaboração e aplicação de uma cartilha / Arlison Fernandes dos Santos, Emilson Júnio Nogueira Araújo, Wemerson José Silva. – 2015.

111 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – Campus São João Evangelista, 2015.

Orientador: Me. Silvino Domingos Neto.

1. Geometria analítica. 2. Ensino. 3. Aprendizagem. I. Santos, Arlison Fernandes dos. II. Araújo, Emilson Júnio Nogueira. III. Silva, Wemerson José. IV. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – Campus São João Evangelista. V. Título.

CDD 510

Elaborada pela Biblioteca Professor Pedro Valério – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – Campus São João Evangelista

Bibliotecário Responsável: Veríssimo Amaral Matias – CRB-6/3266

ARLISON FERNANDES DOS SANTOS; EMILSON JÚNIO NOGUEIRA ARAÚJO; WEMERSON JOSÉ SILVA

O PROCESSO DE FORMALIZAÇÃO DOS CONCEITOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA A PARTIR DA ELABORAÇÃO E APLICAÇÃO DE UMA CARTILHA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Minas Gerais – *Campus* São João Evangelista como exigência parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Silvino Domingos Neto

Aprovada em: 18 / 12 / 2015

BANCA EXAMINADORA

Silvino Domingos Neto

Orientador Prof. Me. Silvino Domingos Neto

Instituto Federal de Minas Gerais – *Campus* São João Evangelista

JBicalho

Profa. Ma. Jossara Basílio de Souza Bicalho

Instituto Federal de Minas Gerais – *Campus* São João Evangelista

Prof. Fernando Sanches Braga

Instituto Federal de Minas Gerais – *Campus* São João Evangelista

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre o ensino da Geometria Analítica na Educação Básica. O estudo baseou-se em referenciais teóricos na área da Educação Matemática e de documentos oficiais da educação nacional. Existem diversos trabalhos realizados no país que investigam e dão suporte teórico para introduzir práticas direcionadas ao ensino desse tópico. Com o intuito de verificar possibilidades de trabalhar alternativas para o ensino de Geometria Analítica, foi desenvolvida uma cartilha. Essa cartilha foi aplicada para uma turma de 3° ano do Ensino Médio, e a análise feita desse trabalho serviu como referência para avaliar a validade de trabalhar essa proposta. Nota-se que o professor pode inserir, em sua didática e planejamento pedagógico, situações que instigam o estudante a se interessar mais por conteúdos importantes como a Geometria Analítica. É de grande valia que a prática pedagógica circule por tendências e métodos de ensino que realmente colaborem com a aproximação e interação entre os estudantes e professores, de forma que venha a contribuir para um ensino e aprendizagem de melhor qualidade na Educação Básica.

Palavras-chave: Geometria Analítica. Ensino. Aprendizagem.

ABSTRACT

The following study is about Analytic Geometry in primary education. Theoretical references in math education and official documents of national education based this study. There are many studies made in the country that investigate and give theoretical support to introduce directed practices to teaching this topic. Aiming to verify the possible working alternatives to the analytic geometry teaching, we developed a booklet. We applied this booklet in a high school senior year group, and used the analysis done in this work as a reference to assess the validity of working with this proposal. It is noticed that the teacher can introduce, in his or her didactic and educational planning, situations that instigate students to get more interested by important contents such as analytic geometry. It is relevant that pedagogical practice goes through trends and teaching methods that really collaborate with the approach and interaction between students and teachers in order to obtain a better quality in teaching and learning process in primary education.

Key Words: Analytic Geometry. Teaching. Learning.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O conteúdo Geometria Analítica é um tópico significativo na Matemática por abordar conceitos algébricos e geométricos. No ensino médio, comumente, a geometria analítica é trabalhada somente no 3º ano, posição estratégica no currículo de Matemática, pois é a etapa de encerramento da Educação Básica e uma etapa preparatória para educação superior.

Conforme Santos:

> A Geometria Analítica é parte integrante dos conteúdos a serem trabalhados na Educação Básica. Além disso, os conceitos trabalhados na Educação Básica são aprofundados nos componentes curriculares dos cursos de graduação das ciências exatas tais como Engenharia, Ciências da Computação, Arquitetura, Matemática, Física, etc. Seu estudo é relevante, pois é uma ferramenta importante para o Cálculo Diferencial e Integral e é uma das principais referências em um primeiro curso de Álgebra Linear (SANTOS, 2013, p. 1-2).

Para esboçar a realidade do ensino de Geometria Analítica na Educação Básica, foram verificados o documento de avaliação dos livros didáticos do PNLD (2012 e 2015) e o documento do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) em relação aos descritores de Matemática que trabalham as habilidades na resolução de problemas de Geometria Analítica.

Segundo a análise do PNLD (2012 e 2015), um aspecto que tem sido alvo de críticas, mas que tem persistido na Geometria Analítica no Ensino Médio, é a fragmentação dos conceitos, principalmente no estudo das retas e suas equações. Também são pouco valorizadas as articulações entre os conceitos de Geometria Analítica e outros campos da Matemática, como: gráficos de funções, representações geométricas dos sistemas lineares, matrizes de transformações lineares. O uso de recursos didáticos como calculadora e outros recursos tecnológicos ainda é um terreno insuficientemente explorado atualmente no ensino médio. Entre os outros recursos tecnológicos, de forma geral, há boas sugestões de utilização de *softwares* livres. Há também incentivo a leituras complementares às do livro didático. No entanto, na maioria das obras, raramente é destacado o uso de instrumentos de desenho na aprendizagem de conceitos geométricos. Assim, faz-se necessário o uso de ferramentas que apoiem o professor no ensino de geometria analítica e que complementem os livros didáticos.

Sidericoudes citando D’Ambrósio diz que:

> As discussões sobre o que é, como se ensina e como se aprende a Matemática escolar cada vez mais ganham espaço na Comunidade de Educação Matemática Internacional e Brasileira, indicando a necessidade de reflexões sobre novas propostas de ensino através de renovações na prática docente. O desafio para os

> professores de Matemática reside em criar ambientes de aprendizagem que incentivam o uso de ferramentas para enriquecer a exploração e investigação de um problema e dar origem a outros problemas. Além disso, o ambiente de ensino e a relação de aprendizagem no ambiente escolar deve promover a questão em que se coloca o estudante a pensar e desenvolver ações onde ele encontre suas próprias respostas (SIDERICOUDES, 1998, p. 1 apud D'AMBRÓSIO, 1986-1990, p. 1).

Com relação à avaliação do ensino de Geometria Analítica na Educação Básica, usou-se como referência o documento do SAEB. O SAEB é um exame complementar que compõe o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica realizado pelo INEP/MEC, que abrange estudantes das redes públicas e privadas do país localizados em área rural e urbana, matriculados no 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e também no 3º ano do Ensino Médio. São aplicadas provas de Língua Portuguesa e Matemática e a avaliação é feita por amostragem.

Diante da análise apresentada no documento do PNLD e do desempenho dos alunos da Educação Básica apresentado nas avaliações externas do SAEB, propôs-se a elaboração e aplicação de uma cartilha que trabalhe os conceitos de Geometria Analítica. Ficou definido como tema do trabalho: o processo de formalização dos conceitos de Geometria Analítica a partir da elaboração e aplicação de uma cartilha. O objetivo principal deste trabalho é avaliar as contribuições do uso da cartilha no ensino e aprendizagem de Geometria Analítica. Têm-se também como objetivos específicos: elaborar e aplicar uma cartilha de Geometria Analítica; explorar alternativas de ensino que complementem os livros didáticos; utilizar o *software* GeoGebra como instrumento de desenho na aprendizagem de conceitos geométricos.

Para iniciar a discussão, têm-se como referência alguns autores pesquisadores na área de Educação Matemática e algumas abordagens tratando acerca das tendências metodológicas no ensino de Matemática. Encontramos em Mendes (2009) algumas considerações a respeito da Educação Matemática. A Educação Matemática como área de estudos e pesquisas tem se constituído por um corpo de atividades essencialmente pluri e interdisciplinares dos mais diferentes tipos, cujas finalidades principais são: desenvolver, testar e divulgar métodos inovadores de ensino, elaborar e apresentar mudanças curriculares, além de desenvolver e testar materiais de apoio para o ensino. Outra preocupação da Educação Matemática consiste nas possíveis contribuições da Matemática na formação integral do cidadão (MENDES, 2009).

Tendo em vista que um dos principais objetivos do ensino de Matemática é oferecer aos estudantes o desenvolvimento de habilidades para resolver problemas, faz-se necessária a capacidade de usar a linguagem matemática e despertar a curiosidade dos estudantes através de problemas, em que situações novas podem ser exploradas e o conhecimento aprofundado, possibilitando ao estudante exercitar sua criatividade e imaginação.

Despertar a curiosidade de um estudante, sem dúvida, é uma grande estratégia de ensino. Colocar o estudante a pensar e desenvolver seu próprio processo de aprendizagem, com a orientação do professor quanto à teoria e aplicação, estimula esse estudante a mostrar que é capaz de aprender usando o que ele já tem de bagagem e sua criatividade.

Segundo Polya:

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta (POLYA, 1987, p. 5).

A participação do aluno na elaboração de seu conhecimento é um dos pontos fundamentais da atual concepção de aprendizagem matemática. Essa participação deve ser orientada, tendo em vista os conceitos a serem construídos, bem como as tarefas a serem realizadas para que essa construção se efetive. Para tanto, a função do professor deve ser a de orientar a aprendizagem, ou seja, a de instigar ideias na apresentação de uma proposta, tendo como ponto de partida a colocação de um problema, a partir do qual se iniciará a discussão das ideias centrais do tema em questão, levando em conta os objetivos que se quer atingir (D'AMBRÓSIO, 1993).

Uma situação que desafie o aluno a levantar suas hipóteses, a pensar e procurar maneiras e caminhos para resolvê-la, experimentar alternativas para a aplicação de um conceito e a sua compreensão, estimular a criatividade do aluno a tentar outras soluções e até mesmo descobrir outras soluções, podemos chamar de problema. A partir de uma situação-problema, e através de uma discussão dessa situação, surge o diálogo entre professor-aluno e aluno-aluno e a partir disso começa uma familiarização com os conceitos matemáticos envolvidos. Antes de qualquer tentativa de formalização, os conceitos precisam ser construídos pelo aluno. Além disso, a discussão dos processos de resolução utilizados e os resultados obtidos favorece a explicitação das observações realizadas, levando a uma linguagem formal da Matemática (SIDERICOUDES, 1998).

Com base nas práticas observadas pelo CBC de Matemática dos ensinos fundamental e médio utilizado pela Secretaria de Educação do Estado de Minas Gerais, o constante desenvolvimento das habilidades para a solução de problemas envolve algumas estratégias, tais como:

a) usar figuras, diagramas e gráficos, tanto de forma analítica quanto intuitiva;
b) expressar oralmente ou por escrito, com suas próprias palavras;
c) perceber padrões em situações aparentemente diversas;
d) fazer uso do método de tentativa e erro, elaborando novas estratégias de solução a partir da análise crítica dos erros;
e) compartilhar e discutir observações e estratégias de outros estudantes, adquirindo, assim, experiência e novos intuitos para abordar um problema, entre outros meios que podem ser utilizados para a resolução de problemas.

O estudante, quando soluciona uma grande variedade de problemas em suas diversas formas que podem vir a ser apresentados, desenvolve a habilidade de atribuir significado aos conceitos abstratos estudados e sua capacidade de aprendizado (CBC BRASIL, 2007).

O avanço tecnológico é constante na sociedade, o que, consequentemente, abrange a área da educação. Surge, então, a necessidade de práticas educacionais que trabalhe esses recursos tecnológicos. Uma ferramenta a ser melhor explorada é o computador. Iran Abreu Mendes, em sua obra *Matemática e Investigação em sala de aula: Tecendo redes cognitivas na aprendizagem* (2009), apresenta algumas considerações acerca do uso do computador como ferramenta de apoio didático no ensino de Matemática.

A Geometria Analítica é um tópico na Matemática que exige capacidade dos alunos em identificar figuras geométricas num plano utilizando coordenadas. O uso de *softwares* representativos no ensino de Geometria Analítica é uma proposta que vem sendo apresentada em várias pesquisas, abordando o uso das TICs (Tecnologias da Informação e Comunicação) no ensino de Matemática. Uma proposta didática que aborde o uso de algum *software* para trabalhar a Geometria Analítica sem dúvida contribuiria para o ensino e aprendizagem desse tópico em específico, além de desenvolver as habilidades dos alunos com esses recursos.

O livro didático, historicamente, é a principal ferramenta de apoio ao professor na sala de aula, o que o torna responsável por influenciar diretamente na metodologia de ensino utilizada pelo professor, que pode utilizar de outras ferramentas que o auxilie no processo de ensino e aprendizagem, diversificando o ambiente da sala de aula de forma a envolver os alunos e permitir que eles se desenvolvam. Um material didático que apresente atividades diversificadas e que trabalhe a inserção de novas tendências no ensino da Matemática é uma possibilidade para trabalhar os conceitos de Geometria Analítica, utilizando do próprio livro didático como suporte ao trabalho em sala de aula. Neste trabalho, será desenvolvido um material didático com objetivo de introduzir conceitos de Geometria Analítica, apresentando, além dos conceitos formais, novas atividades, seguindo a filosofia de ensino das novas tendências em Educação Matemática. De posse dessas informações e considerações, o trabalho ficou definido em quatro capítulos.

O primeiro capítulo trata exclusivamente de apresentar o contexto em que a ideia do trabalho foi desenvolvida, os objetivos e as justificativas.

No segundo capítulo, são apresentadas as considerações teórico-metodológicas que serviram de apoio para a realização deste trabalho. As ideias/conceitos/autores são apresentadas de acordo com os temas discutidos no trabalho: o contexto em que surgiu a pesquisa, a definição dos objetivos e as estratégias para o desenvolvimento do trabalho.

No terceiro capítulo, são descritas, de forma detalhada, todas as etapas e métodos utilizados para alcançar os objetivos propostos, além de apresentar uma avaliação parcial acerca do desenvolvimento do trabalho.

No quarto capítulo, são apresentadas exclusivamente as considerações finais. Nessa etapa, é feita uma análise geral do trabalho apresentando uma avaliação parcial.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Através da disciplina Resolução de Problemas do curso de Licenciatura em Matemática do IFMG-SJE, ocorreram estudos e discussões sobre o processo de ensino e aprendizagem e foi proposto que os pesquisadores fizessem intervenções para melhorar o ensino da Matemática. A partir das dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos pesquisadores deste trabalho na disciplina de Geometria Analítica do referido curso, surgiu a possibilidade de pesquisar estratégias que viessem a contribuir para o ensino desse tópico específico da Matemática.

Para a elaboração dessa cartilha, foi necessário pesquisar diversos trabalhos que apresentassem propostas para o ensino da Geometria Analítica. Dentre esses trabalhos, destacam-se: Ventura (2013), que trata de analisar o conteúdo de Geometria Analítica apresentado nos livros didáticos; Sidericoudes (1998), que consiste em investigar o ensino da Geometria Analítica através do Micromundo Logo, que é um *software* que trabalha o desenho geométrico no plano cartesiano; e Santos (2013), que apresenta uma proposta de ensino da Geometria Analítica numa perspectiva histórica e epistemológica.

O planejamento, a execução e a avaliação de um projeto podem atender às necessidades do professor em tornar suas aulas mais atrativas, colaborando com uma melhor aprendizagem matemática.

Mendes diz que:

> O professor é, na prática de projetos, o orientador do trabalho. Sua principal função será orientar a escolha do tema do projeto para que a atividade realizada pelos alunos seja exequível e conduza a objetos válidos, isto é, seja realmente útil. O uso de projetos tem o mérito de ser, antes de tudo, um dos meios didáticos de que o professor dispõe para combater o ensino verbalista (mecânico) e memorístico, e sua utilização deve proporcionar aos alunos mais do que lhes conferir conhecimentos, dar-lhes oportunidade de desenvolver suas capacidades criativas e investigatórias (MENDES, 2009e, p. 127).

Através da disciplina Prática Pedagógica do curso de licenciatura em Matemática, ocorreram vários estudos sobre o trabalho do professor em sala de aula. Dentre esses estudos, destaca-se a escolha do livro didático a ser utilizado. Foram analisadas as obras do PNLD de 2012 e 2015 para o Ensino Médio. Nessas análises, eram feitas comparações entre as obras e destacadas algumas características como: disposição dos conteúdos em cada série, metodologia de ensino e aprendizagem, o uso dos recursos tecnológicos como o computador e a calculadora, por exemplo, contextualização, linguagem e aspectos gráfico-editoriais.

Foram utilizadas algumas obras de relevância na Educação Matemática, dentre as quais se podem citar: Di Pinto (2000), que trata do processo ensino e aprendizagem da Geometria Analítica, destacando pesquisas brasileiras na década de 90; D'Ambrósio (1986), que apresenta reflexões sobre Educação e Matemática; Mendes (1998), que trata das tendências metodológicas no ensino da Matemática destacando experiências e perspectivas; Polya (1987), que fala sobre o ensino focado na Resolução de Problemas; Brasil (2000), que trata dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Essas obras contribuíram para com o desenvolvimento de uma análise geral de todos os processos em que está envolvido o ensino de Matemática e assimilação das ideias para focar no ensino da Geometria Analítica.

Nos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais), é destacado que as finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivo levar o aluno a: compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral; estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo; reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações.

Segundo os PCNs:

> O currículo do Ensino Médio deve garantir também espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra, mas não isoladamente de outros conceitos, nem em separado dos problemas e da perspectiva sócio-histórica que está na origem desses temas. Estes conteúdos estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real (PCNs BRASIL, 2000, p. 44).

Os PCNs destacam que algumas das competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos são: utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação e utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho. As TICs hoje são ferramentas indispensáveis para o desenvolvimento matemático de qualquer estudante. Instigar os estudantes a pensar, dar a liberdade de imaginar e criar seus métodos, sem precisar seguir modelos e técnicas que muitas vezes não são compreendidas. Todos esses aspectos são de grande importância para o aprendizado, mas não podemos esquecer que o professor deve definir estratégias e traçar objetivos.

Segundo Mendes:

> A informática, atualmente, é considerada uma das componentes tecnológicas mais importantes para a efetivação da aprendizagem matemática no mundo moderno. Sua relação com a Educação Matemática se estabelece a partir das perspectivas metodológicas atribuídas à informática como meio de superação de alguns obstáculos encontrados por professores e estudantes no processo ensino-aprendizagem. O estudo do uso do computador no ensino da Matemática, ou como ferramenta de investigação cognitiva, ou como maneira de renovar os cursos tradicionais, tem se firmado como uma das áreas mais ativas e relevantes da Educação Matemática (MENDES, 2009f, p. 113).

Observando esse texto, nota-se o dinamismo e complexidade que a tecnologia da informação traz para o aprendizado, toda integração e interdisciplinaridade que pode acontecer quando temos uma situação-problema. Mostra quão importante é utilizar essa perspectiva em nossos ambientes escolares em todos os seus níveis.

D'Ambrósio (1993) complementa essa relação entre ambiente e o estudante quanto à sua liberdade de iniciativa e criatividade, dizendo que, para trabalhar a Matemática com a utilização desses ambientes, é necessário o professor acreditar que de fato o processo de aprendizagem se baseia na ação do aluno em resolução de problemas, em investigações e explorações dinâmicas de situações que o intrigam.

Nos últimos anos, em diversos âmbitos da sociedade, como governo e instituições de ensino, pesquisadores e educadores discutem o uso das tecnologias da informação e comunicação (TICs) nos processos de ensino e aprendizagem. As ferramentas digitais que encontramos acessíveis nas escolas oferecem ao professor uma didática com instrumentos capazes de criar novos espaços de interação, fazendo com que sua prática seja diferente das tradicionais baseadas na escrita. Mas é necessário observarmos que não é somente instalar equipamentos nas escolas. É preciso que sejam preparados os educadores e a comunidade educacional de maneira a utilizar essas ferramentas poderosas em seu dia a dia como apoio à sua prática pedagógica.

Visto que utilizaremos o recurso tecnológico como ferramenta no desenvolvimento desta pesquisa, escolhemos um software gratuito de matemática dinâmica (GeoGebra) que reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. O GeoGebra é uma ferramenta que possibilita representar um mesmo objeto de diferentes formas e também é utilizado para criar ilustrações profissionais a serem utilizadas em programas como Microsoft Word, Open Office e LaTeX. O GeoGebra é multiplataforma e pode ser instalado em sistemas operacionais como Windows, Linux ou Mac OS.

Quando pensamos na concepção de ensino-aprendizagem, não podemos deixar de lado a utilização dessas ferramentas da informática ainda como prática pedagógica, é compreendido que se faz necessário que o professor de Matemática reflita como utilizar as tecnologias de informação e comunicação em seu planejamento e desenvolvimento das aulas. (MIRANDA; BLAUDARES, 2007).

> A sociedade e a tecnologia estão integradas e a tecnologia tornou-se o aspecto dominante da civilização. A matemática é o sustentáculo lógico do processamento da informação e o pensamento matemático é também a base para as atuais aplicações da tecnologia da informação (MIRANDA; BLAUDARES, 2007, p. 73).

No processo metodológico, o foco é a elaboração e aplicação da cartilha. Para que a estrutura da cartilha fosse coerente com a proposta, utilizaram-se como referência três obras didáticas do PNLD de 2012 e 2015: *Matemática Paiva*, de Manoel Paiva; *Matemática Ciência e Aplicações*, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida; *Matemática Contexto e Aplicações*, de Luís Roberto Dante. A cartilha extraiu alguns tópicos, definições e atividades dessas três obras. Também foram utilizados ambientes virtuais dos quais extraíram-se atividades e textos complementares presentes na cartilha, além do tutorial básico para o uso do software GeoGebra.

Para a aplicação da cartilha, foi utilizado como referência o trabalho de Mendes (2009), *Matemática e investigação em sala de aula*. Nesse livro, encontram-se considerações importantes sobre o trabalho com projetos no ensino de Matemática. São destacados também o planejamento no ensino da Matemática e o processo de avaliação.

3 METODOLOGIA

Este trabalho adota uma metodologia de cunho qualitativo e desenvolvidos em quatro etapas:

a) pesquisa bibliográfica;
b) elaboração da cartilha a ser utilizada nas atividades;
c) aplicação da cartilha;
d) análise dos resultados.

Em todas as etapas, foram utilizados como referências trabalhos no âmbito da Educação Matemática e *sites* que contivessem conteúdos de Geometria Analítica. Foram verificados livros didáticos e documentos oficiais na área da Educação.

3.1 PESQUISA BIBLIOGRÁFICA

A pesquisa bibliográfica divide-se conforme as etapas do trabalho. Para a definição do tema e dos objetivos, foram utilizados como referência os documentos oficiais de orientações curriculares, como o CBC (Conteúdo Básico Comum) de Matemática dos ensinos Fundamental e Médio adotado pela Secretaria de Educação do Estado de Minas Gerais, PCN+ (Parâmetros Curriculares Nacionais) e os Guias PNLD 2012 e 2015. No referencial teórico, foram usados alguns autores na área da Educação Matemática: D'Ambrósio (1993), Mendes (2009) e Polya (1987). Nessa etapa, procurou-se abordar, de forma geral, as tendências no ensino de Matemática e destacar trabalhos voltados ao ensino de Geometria Analítica. Para a elaboração da cartilha, foram utilizados alguns *sites* que continham informações relacionadas ao uso do *software* GeoGebra e três livros didáticos do PNLD: *Matemática Paiva*, de Manoel Paiva; *Matemática Ciência e Aplicações*, de Gelson Iezzi; e *Matemática Contexto e Aplicações*, de Luís Roberto Dante. Na etapa de aplicação da cartilha, a principal referência foi Mendes (2009).

3.2 ELABORAÇÃO DA CARTILHA

A utilização da cartilha como ferramenta de auxílio no processo de ensino-aprendizagem segue a proposta de trabalhar a construção do conhecimento matemático na escola. Encontramos em Mendes (2009) considerações sobre o trabalho com projetos.

Segundo Mendes:

> Projeto é o ato de planejar uma sequência organizada de tarefas relativas a uma situação-problema concreta, em busca de um fim prático e, desse modo, pode-se dizer mesmo que todas as ações humanas conscientes são, em última análise, a realização de projetos. O uso de projetos tem por fim fazer o aluno agir e realizar algo de prático, com grande atividade mental. Esse processo educativo propõe uma ação planejada e orientada por diretrizes previamente estabelecidas. Conduz o aluno para que ele próprio conceba, prepare e execute a atividade (MENDES, 2009, p. 125).

Ainda em Mendes (2009), são apresentadas algumas orientações específicas para que se possa trabalhar com esses projetos em sala de aula, e como esses projetos se subdividem em diversas propostas metodológicas. Muito tem se falado nos cursos de licenciatura em Matemática sobre tendências metodológicas no ensino de Matemática.

O uso de materiais concretos e jogos, o trabalho da Etnomatemática, a Resolução de Problemas, a Modelagem Matemática, o uso de computadores no ensino de Matemática, enfim, todas essas propostas ganham destaque nas propostas discutidas em Educação Matemática.

A proposta deste trabalho se aplica ao ensino de Geometria Analítica na Educação Básica. Dentre as principais tendências metodológicas no ensino da Matemática, não se tem uma proposta direcionada exclusivamente ao ensino da Geometria Analítica, contudo existem propostas que dão suporte para que se possa enriquecer o ensino desse tópico.

Ao trabalharmos com o uso do computador, por exemplo, existem *softwares* educacionais que são exclusivos para construções geométricas no plano cartesiano, além de estabelecer relações algébricas com essas construções.

Apesar de não focar numa tendência metodológica específica no ensino da Matemática, a proposta procura mesclar o uso dessas tendências nas diversas etapas de desenvolvimento das atividades. Procuramos apresentar um breve resumo acerca de cada uma dessas tendências e como essas tendências estão sendo trabalhadas na proposta da cartilha.

3.2.1 O uso das TICs

Para trabalharmos as construções e representações de figuras geométricas, optamos por trabalhar o uso do *software* GeoGebra.

GeoGebra é um *software* de geometria dinâmica, de código aberto, livre, desenvolvido pelo austríaco Ph. D. Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburg, disponível no endereço eletrônico http://www.geogebra.org/cms/pt_BR para ser utilizado em sala de aula. A utilização de novas tecnologias na educação possibilita a reestruturação do ensino tradicional de geometria, através da inserção de *softwares* de geometria dinâmica como o GeoGebra, desenvolvendo a autonomia do aluno.

3.2.2 Integração de conteúdos

Procuramos estabelecer no texto conexões entre o assunto em desenvolvimento e outros tópicos de Matemática, procurando evitar a fragmentação do conteúdo. Além disso, buscamos destacar alguns conceitos de Geometria Plana e como podem ser vistos no estudo da Geometria Analítica. No estudo das formas de equação da reta, ao apresentarmos a equação reduzida da reta, procuramos destacar as relações existentes com o estudo de função afim. Além disso, muitos exercícios buscam a integração de conteúdos diversos de Matemática, visando também à retomada de conceitos importantes ou à visualização sob outro ponto de vista.

3.2.3 Contextualização e aplicação a outras áreas do conhecimento

No início do estudo dos tópicos sobre plano cartesiano, distâncias entre dois pontos e ponto médio de um segmento de reta, são apresentados problemas ou situações contextualizadas no dia a dia dos estudantes como forma de motivar o leitor na construção dos conceitos apresentados neste estudo.

Há também textos que possibilitam aplicar ou relacionar os conhecimentos matemáticos a outros campos, estabelecendo, por exemplo, um elo entre a Matemática e a Geografia. Por exemplo, ao abordarmos no texto coordenadas geográficas (conceitos de latitude e longitude, unidades de medida de ângulos, sistema de coordenadas e localização de pontos) e o cálculo de distância entre dois pontos (conceitos matemáticos trabalhados em navegação marítima, trigonometria no triângulo retângulo, aplicações à aeronáutica etc.).

3.2.4 Estrutura da cartilha

É um grande desafio para os pesquisadores em Matemática definir uma metodologia adequada de trabalho, e que, de fato englobe todas as propostas desejadas pelo pesquisador. Após a verificação das obras didáticas do PNLD de 2012 e de 2015 para o ensino de Matemática, das análises apresentadas no documento do PNLD e de pesquisas realizadas na área da Educação Matemática em relação ao ensino-aprendizagem de Geometria Analítica no

Ensino Médio, ficou definido utilizar essa cartilha com o objetivo de trabalhar algumas propostas metodológicas, que vêm sendo destacadas por pesquisadores em Educação Matemática.

Essa cartilha foi desenvolvida exclusivamente como apoio ao professor de Matemática, para que possa utilizar da proposta didática apresentada nesse material como base para seu trabalho em sala de aula.

A ordem de disposição dos conteúdos segue a maioria das obras didáticas do PNLD para o ensino de Geometria Analítica. Procuramos focar na introdução aos conceitos, dando destaque para o estudo do ponto e da reta. A disposição dos conteúdos está da seguinte forma: plano cartesiano, distância entre dois pontos, ponto médio de segmento, reta, determinação de uma reta, inclinação de uma reta, condição de alinhamento de três pontos, equação fundamental da reta, equação geral da reta, equação reduzida da reta.

Para a apresentação de conceitos formais, definições e exercícios, foram utilizados alguns livros didáticos do PNLD 2012 e 2015 como referência. As principais foram: *Matemática Ciência e Aplicações*, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida, *Ensino Médio, Volume 3; Matemática Paiva*, de Manoel Paiva, *Ensino Médio, Volume 3*.

Anexo à cartilha, segue um manual que descreve os objetivos das atividades e algumas propostas que podem ser exploradas de forma a complementá-la, além de apresentar as correntes teóricas que referenciam as propostas da cartilha.

3.2.5 Conteúdo da cartilha

Antes de iniciar os tópicos da Geometria Analítica, a cartilha apresenta um texto sobre o uso do GPS e a definição de latitude e longitude. O objetivo desse texto é trabalhar a noção de coordenadas sem relacioná-la ao estudo do Plano Cartesiano. Não são propostas atividades relacionadas ao texto.

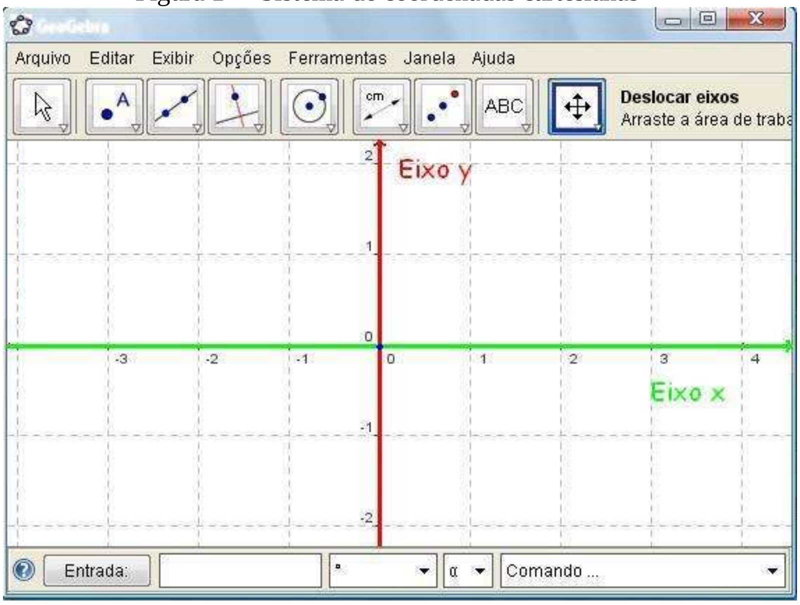
A primeira unidade foca no estudo do ponto, utilizando o *software* Geogebra como ferramenta de auxílio para trabalhar as construções geométricas e representações gráficas. Anexo à cartilha, tem-se um tutorial sobre o uso do GeoGebra.

A unidade inicia com atividades que trabalham a localização de pontos no plano cartesiano, como mostram as atividades a seguir.

Atividade 1

Vamos considerar que o plano cartesiano apresentado no GeoGebra seja o mapa do seu bairro. Consideramos ainda que a origem (local onde os eixos se cruzam) seja sua casa.

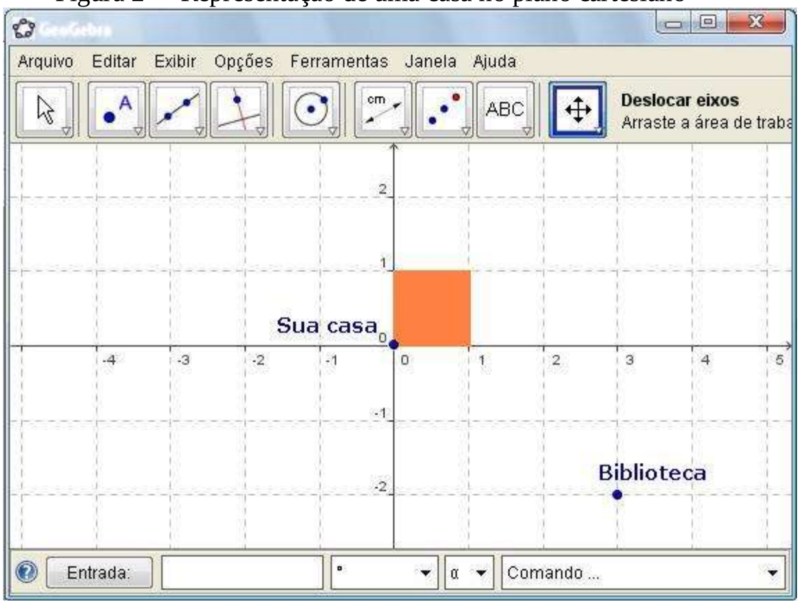
Figura 1 [1]– Sistema de coordenadas cartesianas



Fonte: Foto extraída do *site* geogebristas

Imagine ainda que uma quadra seja um quadrado de lado de medida 1 (figura 2)

Figura 2[2] – Representação de uma casa no plano cartesiano



Fonte: Foto extraída do *site* geogebristas

[1] Disponível em: <http://geogebristas.blogspot.com.br/p/lista-de-exercicios-sobre-geometria.html> Acesso em: 15 de Jan. 2016.
[2] Disponível em: <http://geogebristas.blogspot.com.br/p/lista-de-exercicios-sobre-geometria.html> Acesso em: 15 de Jan. 2016.

Então, podemos dizer que a biblioteca está a 3 quadras ao leste de sua casa (para direita) e duas quadras ao sul de sua casa (para baixo). Vamos adotar o norte sendo para cima, o sul sendo para baixo, o leste para direita e o oeste para a esquerda.

Utilizando as informações dadas acima, marque com pontos no plano cartesiano do GeoGebra as seguintes localidades (para chegar em cada uma das localidades, sempre utilize sua casa como início):

1- Escola: a escola está localizada a 3 quadras a oeste e 4 quadras ao norte.
2- Supermercado: o supermercado está localizado a 2 quadras a leste e 5 quadras ao sul.
3- *Lan house*: a *lan house* está localizada a 1 quadra a leste e 3 quadras ao norte.
4- Parque: o parque está a 7 quadras a oeste e 3 quadras ao sul.
5- Teatro: o teatro está a 3 quadras a oeste e 7 quadras ao sul.
6- Cinema: o cinema está a 8 quadras ao norte.
7- Museu: o museu está a 3 quadras ao oeste.

Após a atividade 1, é apresentada a definição de plano cartesiano e suas características e propriedades.

Atividade 2

Noção intuitiva de que a menor distância entre dois pontos é uma reta:

Após marcar todas as localidades, responda às seguintes questões:

1. Quantas quadras temos de caminhar para chegarmos a cada localidade partindo de sua casa?
2. Qual a localidade que está mais distante de sua casa? Qual está mais perto?
3. Se pudéssemos atravessar “por dentro” das quadras, qual seria a distância de cada localidade até sua casa?
4. Você caminharia uma menor distância entre sua casa e cada localidade se fosse pelas ruas ou atravessando “por dentro” das quadras?
5. Como você descreveria o trajeto de sua casa a cada localidade se atravessasse “por dentro” das quadras?
6. Têm-se duas localidades; a menor distância entre elas é descrita por qual tipo de trajetória?

Após a atividade 2, é apresentada a definição de distância entre dois pontos e o método de cálculo dessa distância.

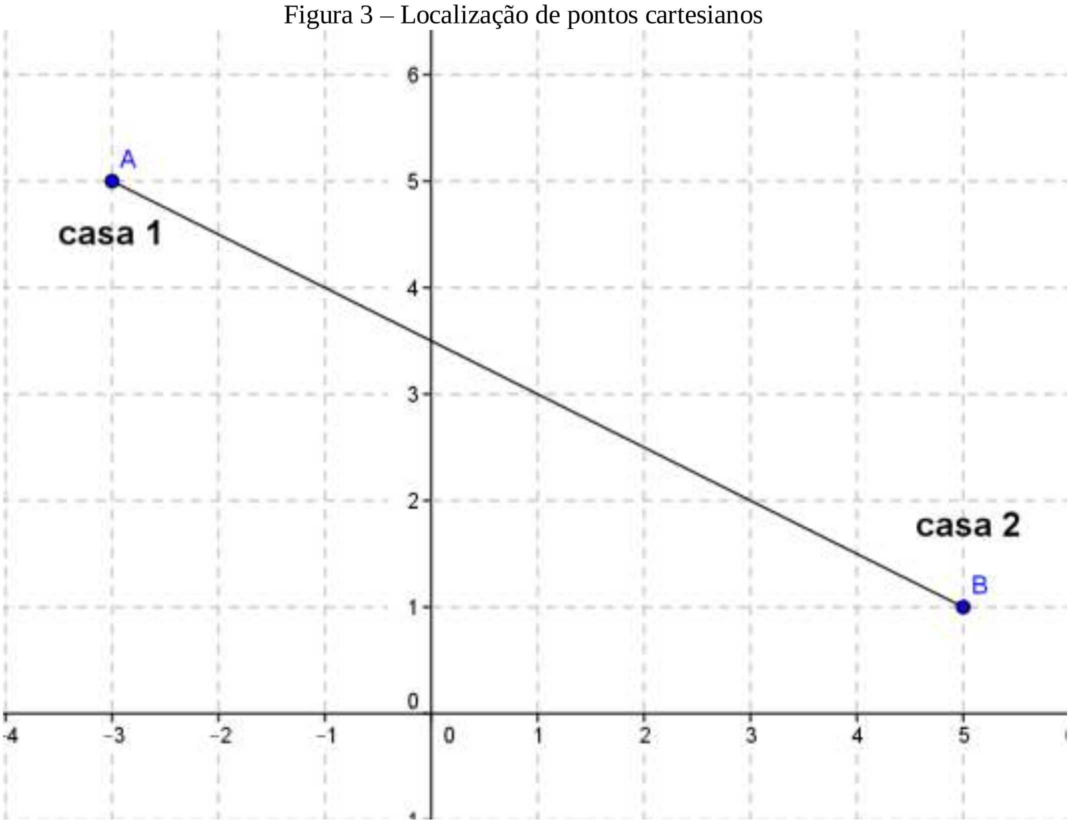
Atividade 3

Considere o seguinte problema: no plano cartesiano, os pontos A e B representam duas casas de uma propriedade rural. Deseja-se perfurar um poço equidistante às casas, de maneira que essa distância seja a menor possível. Quais devem ser as coordenadas do ponto M onde o poço deve ser perfurado? Sabendo que M é um ponto da mediatriz do segmento AB.

Você saberia determinar as coordenadas deste ponto somente visualizando a figura?

E se não tivéssemos a figura e a única informação fossem as coordenadas dos pontos A e B?

Figura 3 – Localização de pontos cartesianos



Fonte: Arquivo dos autores

Após a atividade 3, é apresentada a definição de ponto médio de um segmento de reta e o método para calculá-lo.

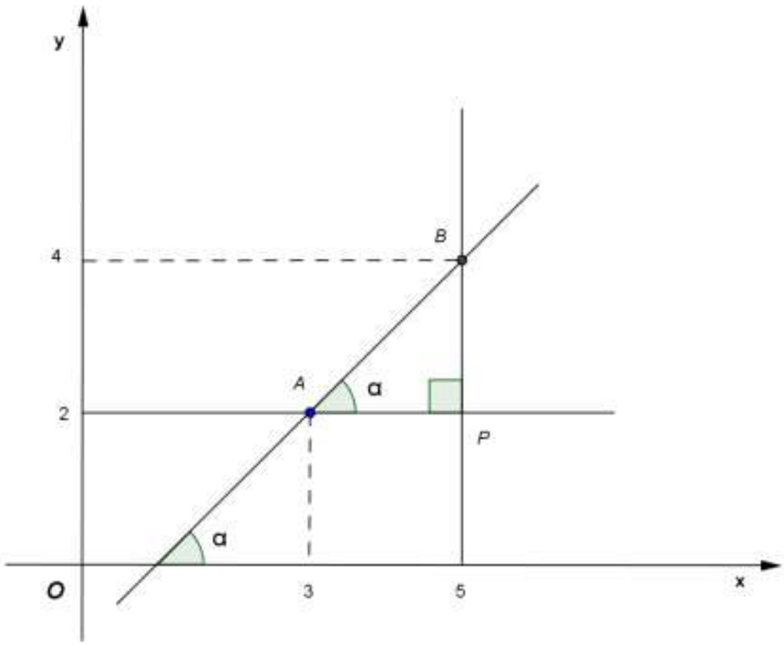
O objetivo das atividades 1, 2 e 3 é despertar a curiosidade dos estudantes em resolver o problema e promover discussões antes de apresentar as definições. Deve-se destacar que todas essas atividades devem ser trabalhadas explorando o *software* GeoGebra como ferramenta de construção. Ainda na primeira unidade, são propostos exercícios que trabalham os conceitos vistos nas primeiras atividades.

Na sequência, a cartilha apresenta um segundo texto sobre o cálculo de distância entre dois pontos através de coordenadas geográficas. O objetivo desse texto é mostrar aos estudantes uma aplicação do cálculo de distância no dia a dia e como o método de cálculo utiliza o mesmo raciocínio usado também na Geometria Analítica, que é o uso do Teorema de Pitágoras. Não são propostas atividades relacionadas ao texto. Ao fim da unidade, é apresentado um breve relato histórico acerca do surgimento da Geometria Analítica. O objetivo desse relato é apresentar, mesmo que de forma resumida, o processo de desenvolvimento desse tópico da Matemática e alguns personagens desse processo.

Na segunda unidade, o foco é no estudo da reta e suas equações. A unidade inicia-se com o estudo de determinação da reta. São vistas duas maneiras de determinar uma reta no plano cartesiano: através de dois pontos distintos pertencentes a essa reta, ou, sabendo um ponto pertencente a uma reta e o ângulo que a mesma forma com o eixo das abscissas. O objetivo é relembrar alguns conceitos de geometria plana e, ao mesmo tempo, trabalhar as construções no GeoGebra.

A segunda atividade consiste em determinar a inclinação de uma reta sabendo as coordenadas de dois pontos dessa reta, conforme representada na figura 4. O objetivo é que os alunos consigam estabelecer um método de determinação dessa inclinação a partir do uso dos conceitos de trigonometria no triângulo retângulo.

Figura 4 – Inclinação de uma reta



Fonte: Arquivo dos autores

Se os pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_{B,}\, y_B)$ pertencem a uma reta r não vertical, então o coeficiente angular m, da reta r é dado por:

$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Em seguida foram propostos exercícios com o objetivo de trabalhar os conceitos vistos e alguma instruções para o cálculo utilizando o GeoGebra.

Foi proposto ainda trabalhar a condição de alinhamento de três pontos. Alguns livros didáticos apresentam o método de definição da condição de alinhamento de três pontos através do cálculo de determinante. Nessa cartilha, o método utilizado para definir essa condição é a comparação do coeficiente angular a cada dois pontos.

O estudo das equações da reta inicia-se com a determinação da equação fundamental da reta utilizando a equação de cálculo do coeficiente angular dessa reta, como referência. A partir dessa determinação, são apresentadas as equações gerais e reduzidas da reta. É apresentado um paralelo relacionando o estudo da equação reduzida com o estudo da equação de função afim.

A função afim (ou função de 1º grau) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada função afim quando sua lei é do tipo $f(x) = ax + b$, com a ϵ R* e $b \in \mathbb{R}$.

Vamos comparar a função afim e a equação da reta:

Equação reduzida da reta	**Função afim**
$y = mx + n$	$f(x) = ax + b$
m: declividade.	a: condição de crescimento.
n: ordenada do ponto de intersecção com o eixo y.	b: $f(0)$.

Podemos concluir que a equação reduzida de uma reta $y = mx + n$ representa outra maneira de expressar a lei de uma função afim $y = ax + b$.

São propostos exercícios que envolvem aplicação dos conceitos estudados. Nesses exercícios, são exploradas as opções que o GeoGebra pode oferecer no estudo das equações. Busca-se introduzir o estudo das equações da reta de forma simples e explorando o *software* GeoGebra nas construções geométricas e nas representações algébricas. Ao fim da unidade, é apresentado um breve relato histórico acerca das equações. O objetivo desse relato histórico é mostrar ao leitor como o estudo das equações acompanhou todo o processo de evolução da humanidade e quem foram os pioneiros no seu estudo.

Deve-se destacar que a cartilha é uma sugestão de trabalho para o ensino de Geometria Analítica e que a sequência didática proposta nesse material é flexível, adaptando-se aos interesses do professor em relação à sua metodologia e à realidade da sala de aula em que ela for aplicada. Mendes (2009) diz que a seleção de conteúdos deve procurar identificar, ao mesmo tempo, conceitos, procedimentos e atitudes a serem trabalhados na sala de aula de modo a enriquecer o processo de ensino-aprendizagem.

Muitos tópicos são apresentados de forma resumida, ficando sob responsabilidade do professor regente explorar de forma mais aprofundada essas propriedades. Por exemplo, na unidade 1 não são apresentados na cartilha os estudos da mediana e baricentro em um triângulo. Na unidade 2, não é apresentada a forma de definição da equação geral da reta por determinante, além de outros tópicos como: interseção de retas, paralelismo, perpendicularidade, distância entre ponto e reta, ângulo entre retas, área do triângulo, além dos estudos da equação da reta na forma segmentária e na forma paramétrica. Deve-se destacar também que a proposta da cartilha é introduzir os conceitos básicos no estudo da Geometria Analítica, não apresentando, assim, um estudo mais aprofundado.

Segundo Mendes:

> A organização dos conteúdos, por sua vez, depende da série em que serão abordados e do plano ou projeto de trabalho que cada professor tem para desenvolver durante o ano letivo. O importante, nesse momento é estabelecer conexões entre os diferentes tópicos do conteúdo selecionado, articulando os múltiplos aspectos de cada assunto com situações cotidianas dos alunos e as outras áreas do conhecimento. Para que isso ocorra, deve-se dar uma ênfase maior ou menor a cada um dos tópicos do conteúdo e seus níveis de aprofundamento em função das possibilidades de compreensão dos alunos, principalmente considerando o contexto social em que eles estão inseridos (MENDES, 2009, p. 155).

3.3 APLICAÇÃO DA CARTILHA

As atividades foram aplicadas em uma turma do 3° ano do Ensino Médio, da Escola Estadual Major Lermino Pimenta, do distrito de Nelson de Sena no município de São João Evangelista-MG, com o apoio do professor de Matemática regente da escola. Alguns fatores contribuíram para que fosse definido que o trabalho fosse realizado nessa escola, como: disponibilidade de tempo e espaço necessários ao desenvolvimento das atividades; facilidade de comunicação entre os pesquisadores e a direção e o professor regente da escola; conhecimento da realidade da escola e do perfil da maioria dos estudantes.

O trabalho prático foi desenvolvido num total de 14 aulas, sendo que as atividades foram desenvolvidas em sala de aula e no laboratório de informática simultaneamente. O laboratório de informática dispõe de 14 computadores em perfeito estado de funcionamento.

Antes de iniciar a aplicação da cartilha, a proposta de trabalho foi apresentada ao professor de Matemática regente e para a classe de estudantes. O professor ainda não havia trabalhado com a turma o estudo da Geometria Analítica, ficando a cargo de iniciar este estudo com a cartilha.

Deve-se destacar a importância de um bom plano de ensino para que as atividades se desenvolvessem numa sequência didática bem definida e coerente com a proposta. Mendes (2009) destaca alguns aspectos no processo de planejamento da disciplina, como: conhecimento da realidade do aluno, da escola e da comunidade; definição dos objetivos a serem alcançados pelos alunos em relação à disciplina; seleção dos possíveis e melhores recursos humanos e materiais.

Apresenta-se, então, um breve resumo do plano de ensino utilizado para aplicação da cartilha com a intenção de destacar os objetivos da aplicação da cartilha e as principais estratégias utilizadas no processo de aplicação. Tem-se:

Ideia central: geometria analítica, estudo do ponto, reta e suas equações.
Objetivo geral: trabalhar o ensino dos tópicos iniciais de geometria analítica através da proposta da cartilha.
Objetivos específicos: a) explorar o uso do software GeoGebra no ensino de Geometria Analítica; b) avaliar o desempenho de um grupo específico de estudantes na aprendizagem dos conceitos trabalhados; c) avaliar as contribuições do uso da cartilha no ensino aprendizagem da Geometria Analítica
Principais estratégias: aula expositiva em sala; aulas exploratórias do software GeoGebra em laboratório; atividades em dupla; avaliação constante do processo; avaliações diagnósticas
Principais recursos: quadro e giz, computadores, a cartilha, livro didático, bloco de anotações, câmera fotográfica.
Avaliação: a avaliação do desempenho dos estudantes foi realizada constantemente, levando em consideração: notas de avaliações, empenho no desenvolvimento de atividades. A avaliação do processo de aplicação da cartilha será feita com base na dinâmica em que as atividades ocorreram e com base no desempenho dos estudantes. A partir da definição da proposta, iniciaram-se as atividades de aplicação da cartilha.

3.3.1 Atividades

No 1° dia de atividades. As atividades iniciaram-se no laboratório de informática com a apresentação do *software* GeoGebra e a realização de atividades que exploraram algumas ferramentas de que o *software* dispõe. As atividades realizadas foram: determinação de pontos, retas, segmento de reta, ponto médio de segmento de reta, ângulos, polígonos, todos feitos no plano cartesiano. Os alunos inicialmente tiveram dificuldades em trabalhar com o GeoGebra, pois a maioria estava em contato com o *software* pela primeira vez, porém as dificuldades foram superadas no decorrer das atividades. Todas as atividades realizadas no computador foram salvas para servir de referência para avaliações. As atividades do 1° dia foram realizadas num total de 2 horas/aulas consecutivas. Não foram dadas tarefas a serem realizadas em casa. A Figura 5 mostra as atividades de reconhecimento do *software* GeoGebra.

Figura 5 – Apresentação do *software* GeoGebra

Fonte: Arquivo dos autores

No 2° dia de atividades. As atividades ocorreram na sala de aula e no laboratório. Foram trabalhadas a localização de pontos no plano cartesiano através do GeoGebra e atividades de determinação de distância entre dois pontos. Posteriormente, em sala de aula foi definido o método de cálculo de distância entre dois pontos. As atividades do 2° dia foram realizadas num total de 2 horas/aulas consecutivas. Foram propostas algumas atividades para serem realizadas em casa, sendo que elas seriam realizadas no caderno e não necessitariam do uso do GeoGebra. A Figura 6 mostra a realização das atividades no laboratório e a Figura 7 mostra a formalização dos conceitos vistos através do GeoGebra.

Figura 6 – Atividades de localização de pontos no plano cartesiano

Fonte: Arquivo dos autores

Figura 7 – Atividades de determinação de distância entre dois pontos

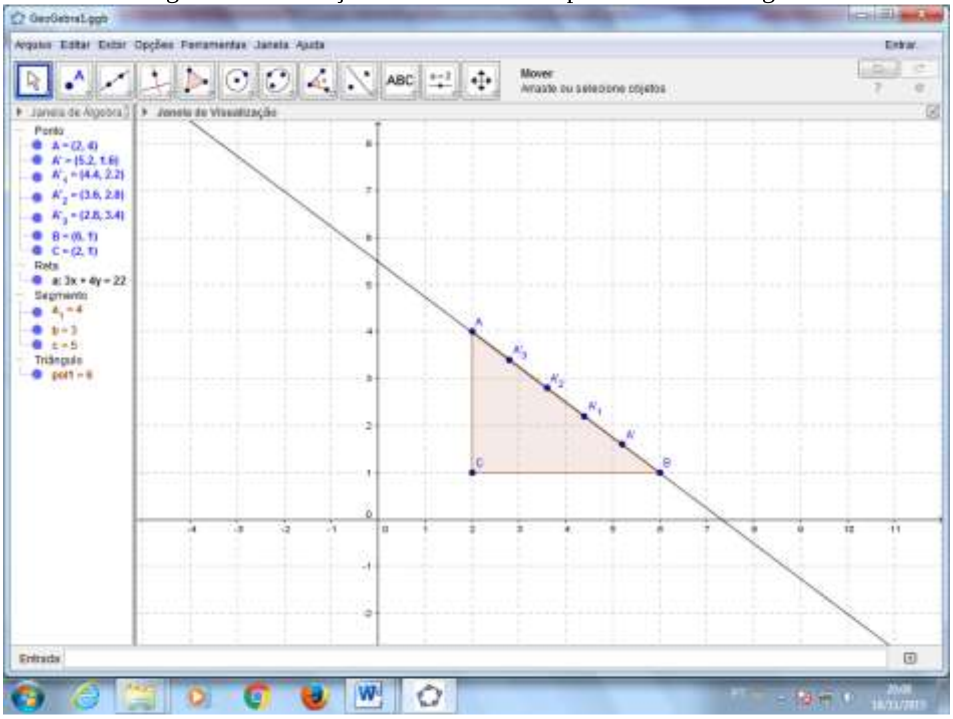
Fonte: Arquivo dos autores

No 3° dia foram desenvolvidas atividades em sala e no laboratório. Iniciaram em sala com a correção e discussão das atividades propostas na aula anterior. Na sequência, todos se direcionaram ao laboratório. Foram trabalhadas atividades de determinação de coordenadas do ponto médio de um segmento, utilizando o GeoGebra. Posteriormente, foi definido em sala de aula o método de cálculo das coordenadas. Foram propostos exercícios que trabalham esses conceitos de coordenadas de ponto médio de segmento de reta. Algumas atividades propostas não fazem parte da lista da cartilha; são atividades de livros didáticos utilizados como referência para a cartilha. Os trabalhos no 3° dia somaram 3 horas/aulas, sendo que 2 delas foram consecutivas. A Figura 8 mostra atividades de definição de coordenadas do ponto médio de um segmento de reta. Na Figura 9, está representada uma dessas atividades resolvidas.

Figura 8 – Atividades de determinação de coordenadas do ponto médio de um segmento

Fonte: Arquivo dos autores

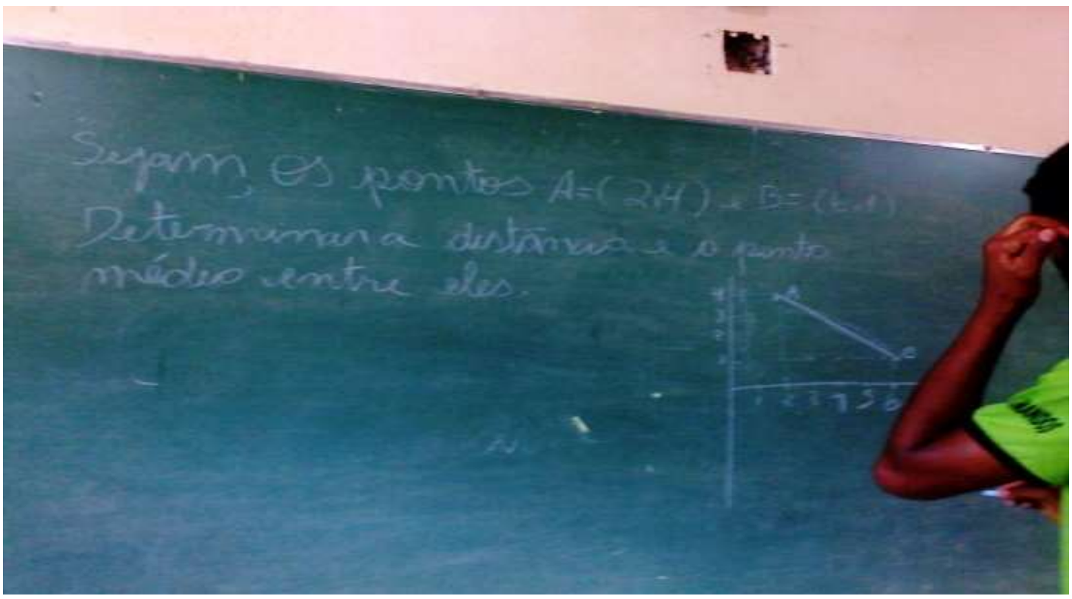
Figura 9 – Resolução das atividades de ponto médio do segmento



Fonte: Arquivo dos autores

No 4° dia de atividades a aula foi realizada em sala. Foi feita uma breve revisão do conteúdo visto e na sequência foram propostas atividades em folha separada como avaliação parcial envolvendo o estudo do plano cartesiano, distância entre dois pontos e coordenadas do ponto médio de um segmento. Foram utilizadas 2 horas/aulas consecutivas. A Figura 10 mostra a resolução de atividades no quadro negro.

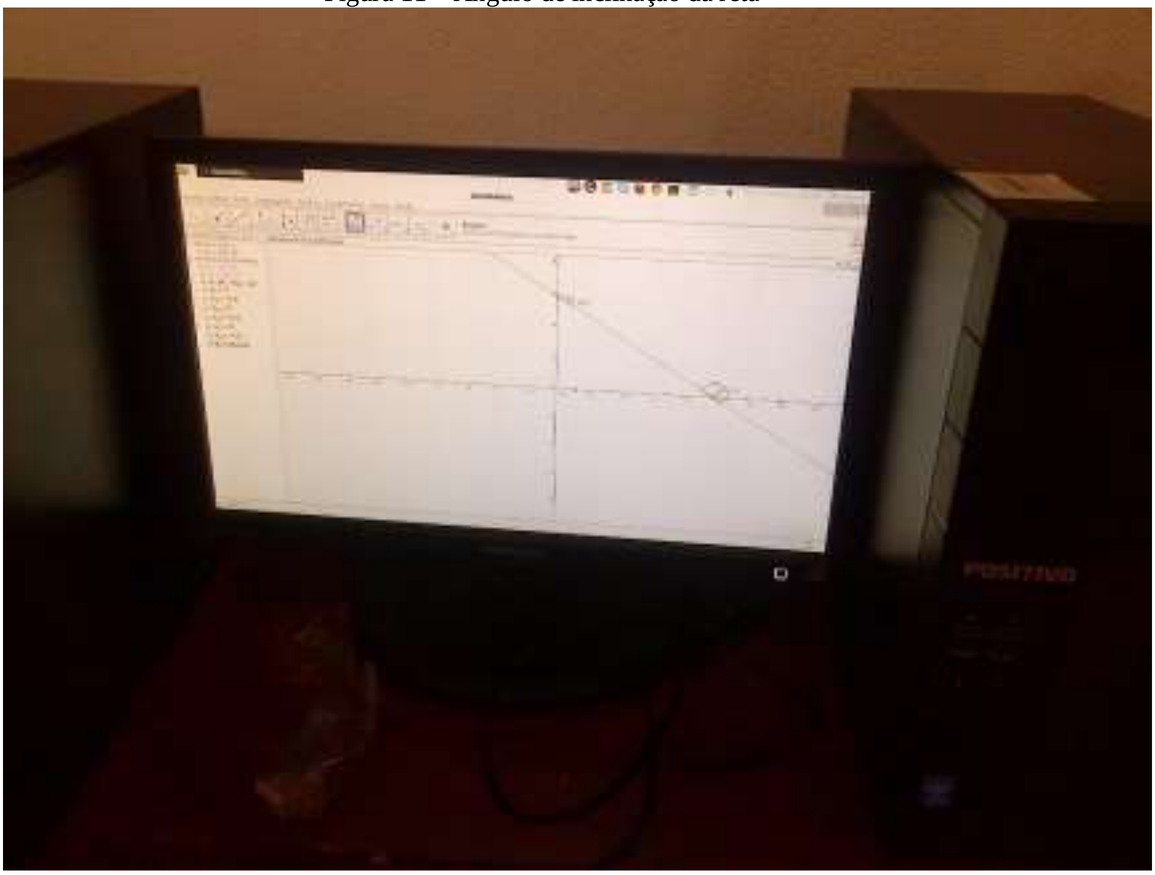
Figura 10 – Revisão de distância entre dois pontos



Fonte: Arquivo dos autores

No 5° dia de atividades os trabalhos foram realizados na maior parte do tempo no laboratório. Envolveu determinação da reta por dois pontos e através do ângulo de inclinação utilizando o GeoGebra. A área de tarefas do GeoGebra na forma de malha quadriculada favoreceu o raciocínio de determinação do método de cálculo do coeficiente angular da reta. Foram propostas atividades de determinação do coeficiente angular de retas dadas utilizando o Geogebra. Posteriormente, em sala foram definidas a fórmula de cálculo do coeficiente angular e a condição de alinhamento de três pontos distintos, além de propostos alguns exercícios em sala que trabalhavam os conceitos vistos. Também foram utilizadas 2 horas/aulas consecutivas. A Figura 11 mostra a realização da atividade de construção de ângulo e determinação do coeficiente angular através do GeoGebra.

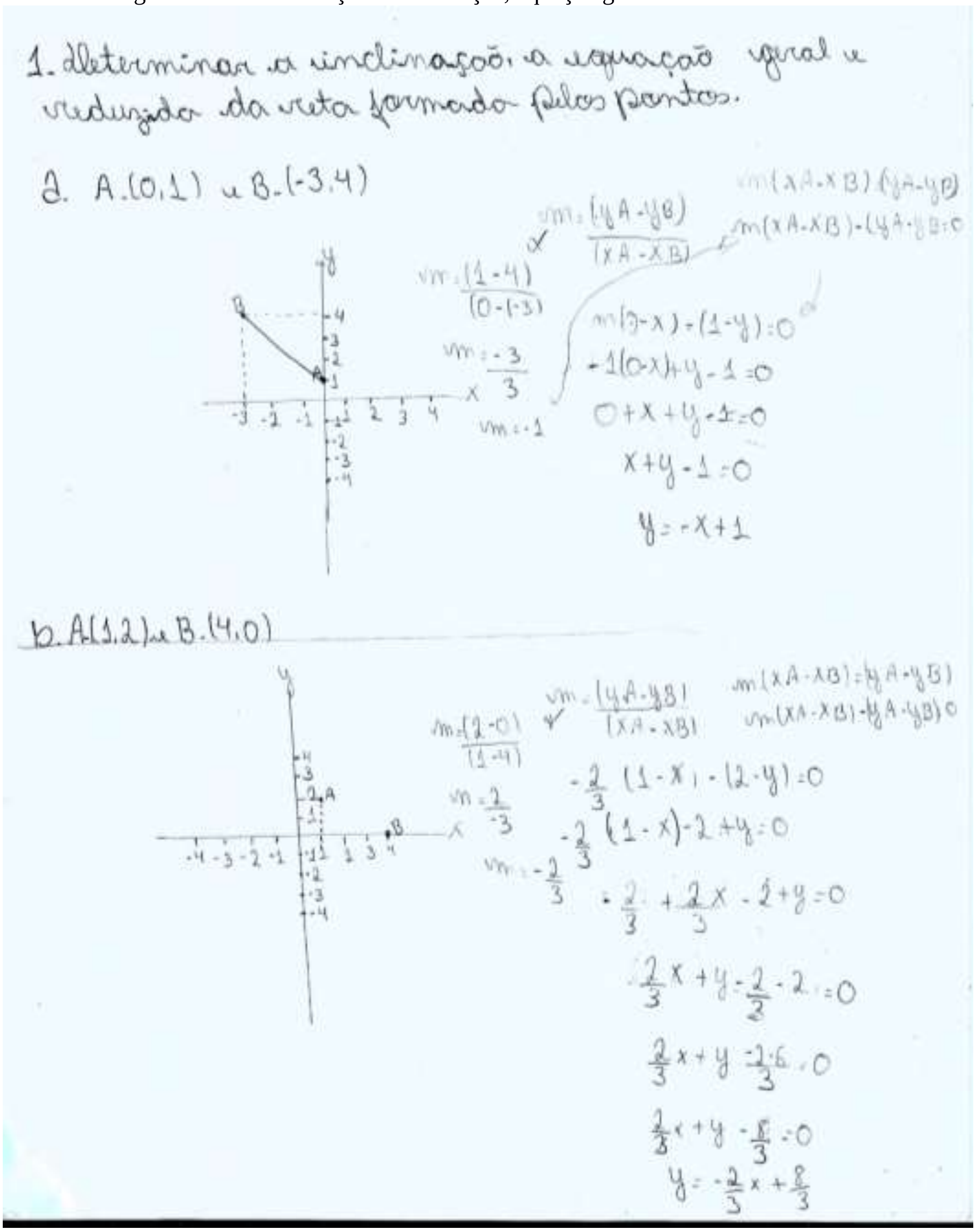
Figura 11 – Ângulo de inclinação da reta



Fonte: Arquivo dos autores

No 6° dia, as atividades foram realizadas em sala e no laboratório. Inicialmente, no laboratório, foram definidas as equações da reta através da determinação e da interpretação da equação apresentada na janela de álgebra do GeoGebra. Foram propostas em sala de aula atividades que trabalham a determinação das equações da reta (equação geral e equação reduzida) e propostas atividades sobre os conceitos vistos. Ao fim da aula, foram propostas atividades a serem realizadas em casa, servindo como avaliação parcial do desempenho dos estudantes em relação aos conceitos trabalhados. Foram utilizadas 3 horas/aulas, sendo que 2 dessas aulas foram consecutivas. A figura 12 mostra a resolução do aluno A determinando a inclinação, a equação geral e reduzida da reta.

Figura 12 – Determinação da inclinação, equação geral e reduzida de uma reta



Fonte: Arquivo dos autores

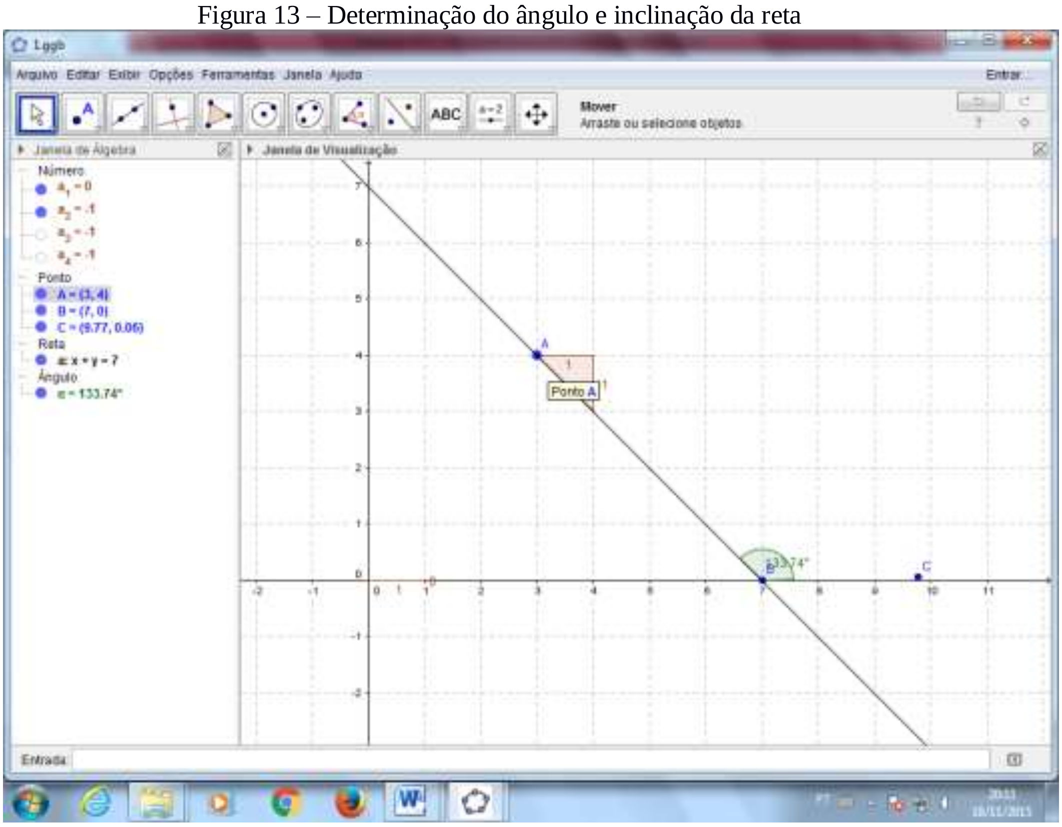
No 7° dia de atividades foram recolhidas as atividades e proposto que os estudantes desenvolvessem um breve relato descrevendo o trabalho realizado no período de aplicação da cartilha. Esse relato foi recolhido no dia seguinte. Foram utilizadas 2 horas/aulas.

3.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A proposta era verificar como a cartilha poderia auxiliar professores e alunos na formalização dos conceitos de Geometria Analítica. Após a elaboração e aplicação da cartilha, espera-se que os discentes conheçam os conceitos básicos de Geometria Analítica trabalhados e a utilidade do *software* GeoGebra no estudo desses conceitos.

Com relação ao trabalho com o *software* GeoGebra, parte dos estudantes tiveram resistência em trabalhar com essa ferramenta por uma série de fatores como: dificuldades no uso do computador de uma forma geral; dificuldades específicas relacionadas ao uso das ferramentas do *software*. Pode-se perceber que, conforme apontado nas análises do PNLD, o uso de recursos tecnológicos é um terreno insuficientemente explorado no ensino de Matemática. As atividades realizadas pelos estudantes através do *software* não foram avaliadas com relação ao desempenho na utilização do mesmo. Foram avaliados os requisitos básicos que eram necessários para trabalhar as construções simples no GeoGebra, como: determinação de retas; construção de ângulos; determinação de ponto médio de segmentos de reta, entre outros.

Figura 13 – Determinação do ângulo e inclinação da reta



Fonte: Arquivo dos autores

A Figura 13 mostra a representação do ângulo formado entre o eixo horizontal x e a reta que passa pelos pontos $A\ e\ B$. O objetivo dessa atividade foi mostrar aos alunos como identificar a inclinação da reta a partir do ângulo que a mesma forma com o eixo x.

Acredita-se que, ao fim da aplicação da cartilha, a avaliação foi positiva com relação ao uso do *software*. Os gráficos construídos no GeoGebra mostram com exatidão cada coordenada de um gráfico e podem-se fazer muitas construções em uma única tela, ao passo que no caderno é necessário mais espaço e tempo para realizar essas construções. Os estudantes passaram a perceber melhor as propriedades geométricas e algébricas envolvidas, devido à perfeição das figuras e das informações apresentadas através da janela de álgebra do *software* (vide figura 13 que mostra claramente o ângulo e a inclinação da reta formada por este ângulo e o eixo das abcissas). Além das contribuições com o trabalho dos conceitos de Geometria Analítica, o uso do *software* contribuiu para que alguns estudantes rompessem a resistência que tinham com relação ao uso do computador.

Com relação ao trabalho do conteúdo da cartilha, os estudantes, de forma geral, tiveram dificuldades em relação à parte conceitual. Grande parte dos estudantes não recordavam conceitos básicos de Geometria Plana, comprometendo a compreensão de alguns conceitos de Geometria Analítica. Outro fator a destacar é a dificuldade apresentada pelos estudantes em relatar oralmente e através da escrita os conceitos estudados na Geometria Analítica, confirmando o que foi destacado por Di Pinto (2000), o qual, em suas pesquisas, concluiu que a principal preocupação no ensino e aprendizagem de Geometria Analítica é a falta de significado dado pelos estudantes aos objetos matemáticos estudados e que o ensino de Geometria Analítica é focado na manipulação de algoritmos. A Figura 14 mostra o aluno B desenvolvendo atividade de distância entre dois pontos. Nessa atividade, foi possível perceber que os estudantes, de forma geral, compreenderam os conceitos vistos, porém apresentavam dificuldades em relatar oralmente. Por outro lado, pode-se perceber que os estudantes aceitaram bem a proposta de conciliar as atividades da cartilha com o uso do GeoGebra.

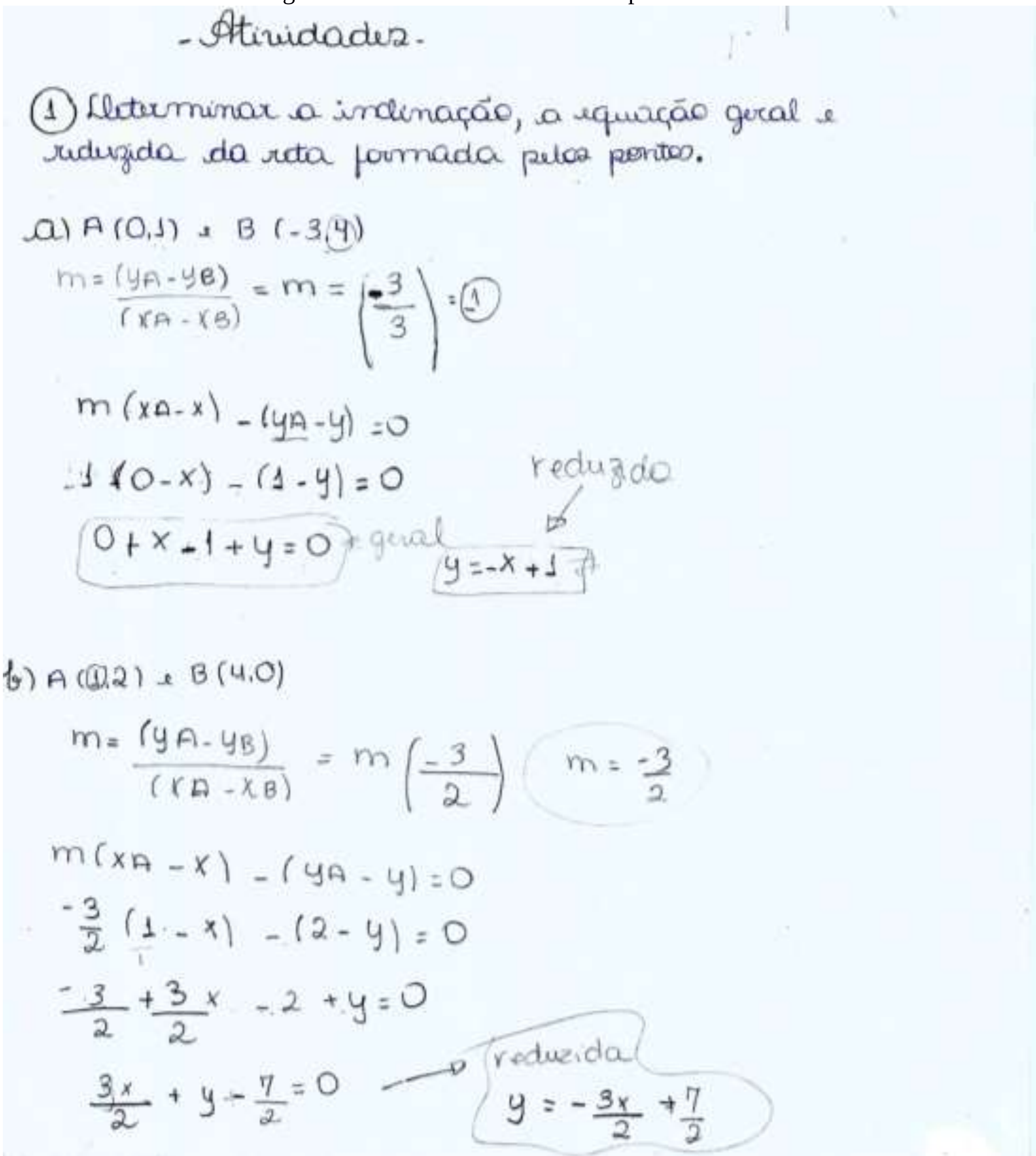
Figura 14 – Atividades desenvolvidas pelo aluno B

Fonte: Arquivo dos autores

Foram propostas duas avaliações no final de cada uma das duas unidades. Ao final da primeira unidade, os estudantes foram avaliados através da resolução de atividades no caderno e na participação em correções de atividades no quadro. Ao fim do estudo da segunda unidade, foram propostas atividades avaliativas trabalhadas em sala de aula, com o objetivo de avaliar parcialmente a aprendizagem dos estudantes com relação aos conceitos de determinação da equação da reta através do coeficiente angular.

A figura 15 mostra a resolução do aluno C sobre as atividades: inclinação da reta, equação geral da reta e equação reduzida da reta formada pelos pontos A e B dados.

Figura 15 – Atividade desenvolvida pelo aluno C



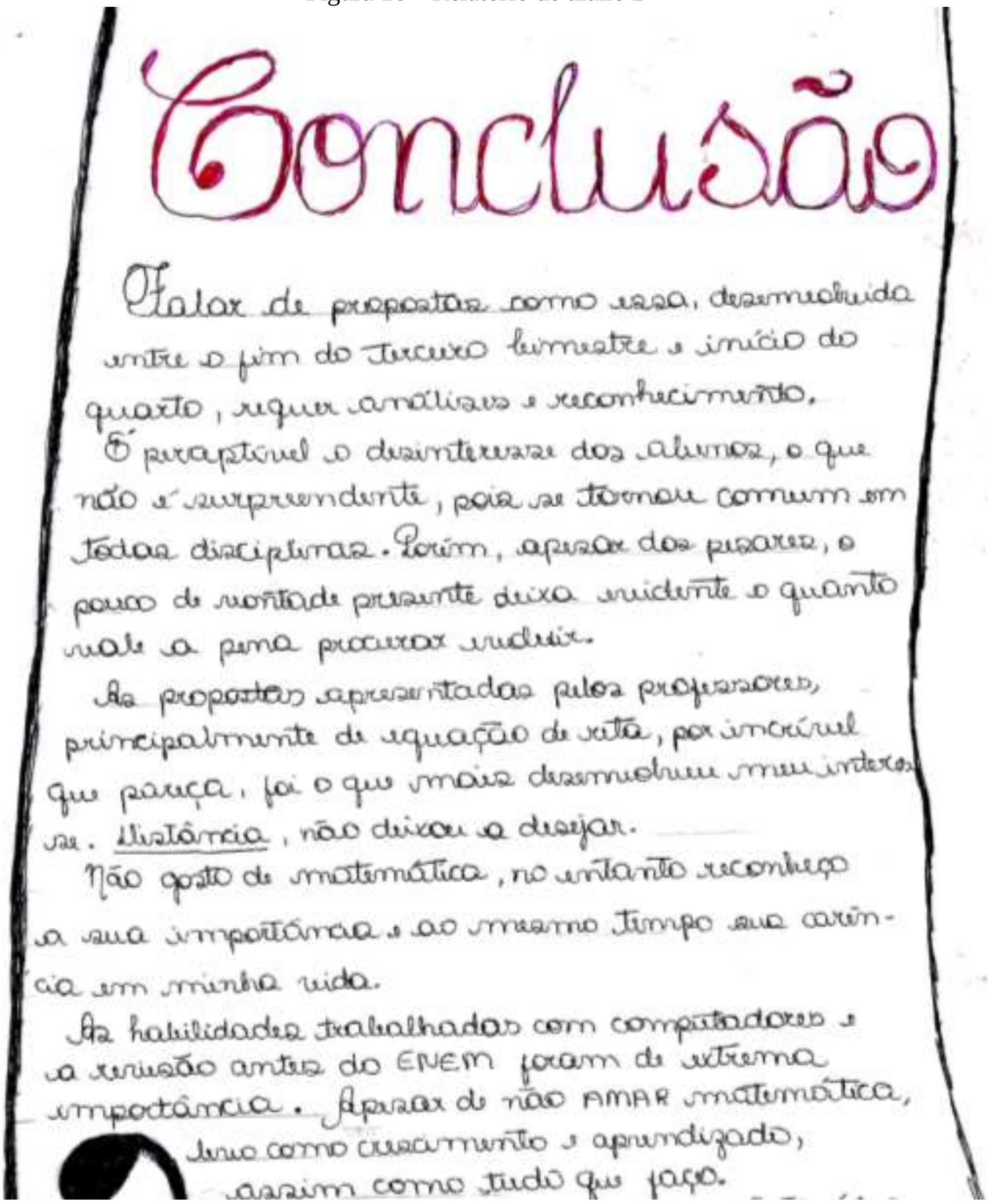
Fonte: Arquivo dos autores

Através dessas avaliações, foi possível perceber que a maioria dos estudantes teve dificuldades em relacionar as representações geométricas com os conceitos algébricos. Através do GeoGebra, foram realizadas as seguintes atividades: construção de retas; determinação da inclinação de retas; identificação da equação geral e determinação da equação reduzida. O *software* contribuiu para que os estudantes percebessem as relações existentes entre conceitos algébricos e geométricos.

Ao final das atividades da cartilha, foi proposto aos estudantes que fizessem um relatório no caderno, falando sobre seus respectivos pontos de vista em relação ao material trabalhado.

As figuras 16 e 17 apresentam respectivamente os relatos dos alunos D e E sobre o trabalho desenvolvido com essa turma.

Figura 16 – Relatório do aluno D



Conclusão

Falar de propostas como essa, desenvolvida entre o fim do terceiro bimestre e início do quarto, requer análises e reconhecimento.

É perceptível o desinteresse dos alunos, o que não é surpreendente, pois se tornou comum em todas disciplinas. Porém, apesar dos pesares, o pouco de vontade presente deixa evidente o quanto vale a pena procurar incluir.

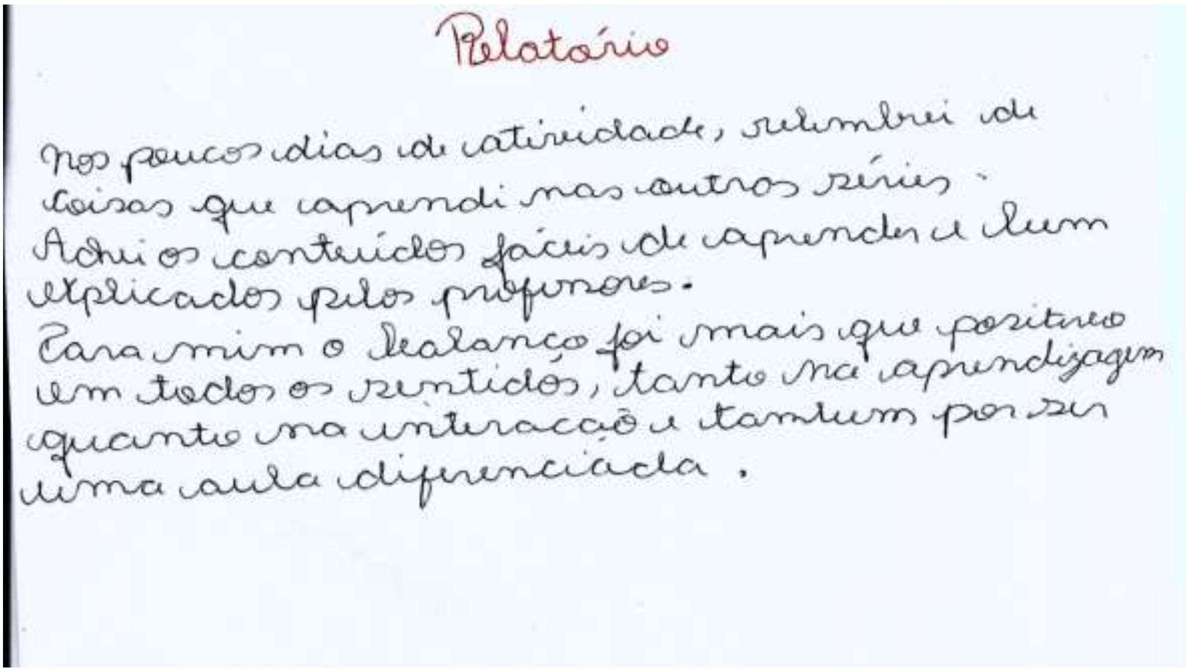
As propostas apresentadas pelos professores, principalmente de equação de reta, por incrível que pareça, foi o que mais desenvolveu meu interesse. Distância, não deixou a desejar.

Não gosto de matemática, no entanto reconheço a sua importância e ao mesmo tempo sua carência em minha vida.

As habilidades trabalhadas com computadores e a revisão antes do ENEM foram de extrema importância. Apesar de não AMAR matemática, levo como crescimento e aprendizado, assim como tudo que faço.

Fonte: Arquivo dos autores

Figura 17: Relatório do aluno E


Relatório

nos poucos dias de atividade, relembrei de
coisas que aprendi nas outras séries.
Achei os conteúdos fáceis de aprender e bem
explicados pelos professores.
Para mim o balanço foi mais que positivo
em todos os sentidos, tanto na aprendizagem
quanto na interação e também por ser
uma aula diferenciada.

Fonte: Arquivo dos autores

Através desses relatórios, foi possível realizar parcialmente uma avaliação crítica com relação ao trabalho de aplicação da cartilha. Alguns estudantes destacaram a desmotivação com relação ao estudo da disciplina de Matemática, isso refletiu no rendimento desses estudantes com relação às atividades propostas ao longo do trabalho. Outros destacaram o dinamismo em que as atividades ocorreram na escola, alternando o espaço de sala de aula com o laboratório de informática, e que contribuiu para que houvesse maior interação entre estudantes e professor.

Diante das análises das atividades desenvolvidas na aplicação da cartilha, pode-se afirmar que o resultado foi positivo. Com relação aos estudantes, de forma geral participaram efetivamente de todas as atividades, não apenas as realizando, mas também discutindo e propondo sugestões. Com relação à aprendizagem, foi possível avaliar que a maioria apresenta dificuldades em relacionar os conceitos algébricos com os conceitos geométricos, porém o uso do s*oftware* GeoGebra contribuiu para que parte dessas dificuldades fosse superada.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base nos estudos que foram desenvolvidos nesse trabalho, acreditamos que, apesar dos esforços direcionados ao desenvolvimento de métodos, materiais e estratégias para o ensino de Matemática, são muitos os obstáculos a serem superados por instituições, pesquisadores, professores e alunos.

No desenvolvimento deste trabalho, percebeu-se um conjunto de fatores citados na análise dos resultados de aplicação da cartilha que contribuem negativamente no processo de ensino e aprendizagem de Geometria Analítica. Os fatores citados por Di Pinto (2000) e na análise do PNLD se confirmam. Deve-se ressaltar que o trabalho foi desenvolvido com um grupo específico de estudantes, porém os resultados obtidos neste trabalho podem servir de parâmetro para fazer um balanço do ensino e aprendizagem de Geometria Analítica.

A proposta de trabalho da cartilha atendeu algumas reinvindicações de métodos para o ensino de Geometria Analítica. Apesar das dificuldades dos estudantes no domínio do computador, o uso do *software* e a dinâmica de trabalho proporcionaram aos estudantes a motivação para desenvolver as atividades. Isso confirma o que foi dito por Mendes (2009), que defende o uso do computador como meio de superação de alguns obstáculos encontrados por professores e estudantes no processo de ensino e aprendizagem. Com relação ao desempenho e aprendizagem dos estudantes nos conceitos de Geometria Analítica, a proposta da cartilha apresenta atividades que despertam a curiosidade dos estudantes em resolver problemas, evitando focar em definições e manipulação de algoritmos.

Tendo em vista que o objetivo desse trabalho foi apresentar uma proposta que contribua para o ensino de Geometria Analítica, acreditamos que o resultado foi satisfatório, de modo que a cartilha contribuiu para inserir propostas didáticas que até então vinham sendo pouco exploradas. Deve-se ressaltar que a cartilha apresentada neste trabalho não é uma proposta definitiva para o ensino de Geometria Analítica, e que está sujeita a adaptações e pode ser complementada com outras ferramentas didáticas.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria da Educação Básica – MEC**. Parâmetros curriculares nacionais do Ensino Médio: matemática**. 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&id=12598%3Apublicacoes&Itemid=859>. Acesso em: 24 nov. 2015.

BRASIL. Secretaria de Estado de educação de Minas Gerais. **CBC Matemática, Ensino Fundamental e Ensino Médio**. Proposta Curricular 2007. Autores da proposta: Mário Jorge Dias Carneiro; Michael Spira; Jorge Sabatucci. Disponível em: <http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/index.aspx?&usr=pub&id_projeto=27&id_objeto=39143&id_pai=38935&tipo=txg&n1=&n2=Proposta%20Curricular%20-%20CBC&n3=Ensino%20M%C3%A9dio&n4=Matem%C3%A1tica&b=s&ordem=campo3&cp=B53C97&cb=mma. Acesso em: 24 nov. 2015.

CAMARGO, Paulo Cezar Guedes. **Algumas Aplicações do Software GeoGebra ao ensino da Geometria Analítica**. Vitória – ES, UFES – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. (Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional – PROFMAT). 09 de abril de 2013.

DAMBRÓSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação – reflexões sobre educação e matemática.** São Paulo, SUMMUS/UNICAMP, 1986. 115p. Disponível em: < http://emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/viewFile/673/600> Acesso em: 24 nov. 2015.

DAMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**. São Paulo: Ática, 1990.

DAMBRÓSIO, Ubiratan**. Etno: Uma nova abordagem sobre a construção do conhecimento revoluciona a aplicação das disciplinas na escola.** Nova Escola, São Paulo, agosto. 1993.

DANTE, Luiz Roberto. **Formulação de problemas de matemática: Teoria e Prática**. São Paulo: Ática, 2010. (Educação).

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações.** Ática, 2009.

DI PINTO, M. A. **Ensino e Aprendizagem da Geometria Analítica**: As pesquisas Brasileiras da década de 90. Dissertação (Mestrado em Educação matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

IEZZI, Gelson. Livro didático, **Matemática: ciência e aplicações.** Editora Moderna 2ª edição 2010.

MENDES, Iran Abreu; FOSSA, John A. **Tendências atuais na Educação Matemática: experiências e perspectivas.** In: FOSSA, John A. (Org.). Educação Matemática. Natal: EDUFRN, 1998. p. 11-18 (Coleção EPEN, v. 19).

MENDES, Iran Abreu**. Matemática e Investigação em sala de aula: Tecendo redes cognitivas na aprendizagem.** Ed. rev. e aum. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

MIRANDA, Dimas Felipe; BLAUDARES, João Bosco**. Informatização no ensino de matemática: investindo no ambiente de aprendizagem.** Zetetiké, Campinas, v. 15, n.27, jan./jun. 2007.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva.** 2. ed. São Paulo, 2013.

PDE/SAEB, **Plano de Desenvolvimento da Educação 2011**. Ministério da Educação/Secretaria da educação Básica. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep)/Diretoria de Avaliação da Educação Básica. <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/saeb_matriz2.pdf>. Acesso em: 24 nov. 2015.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. 2. reimp. Rio de Janeiro: Interciência, 1987.

PNLD 2012, Ensino Médio, Matemática: **Guia de livros didáticos**. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, 2011.

PNLD 2015, Ensino Médio, Matemática: **Guia de livros didáticos**. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, 2014.

SANTOS, Adriana T. Castro. **Caminhos e percursos da Geometria Analítica: estudo histórico e epistemológico.** PUC-SP, Brasil, 2013.
Disponível em: <www.centroedumatematica.com/memorias.../137-440-1-DR-C.pdf>. Acesso em: 24 nov. 2015.

SIDERICOUDES, Odete. Núcleo de Informática aplicada à Educação – NIED. UNICAMP – SP – Brasil. **A Formalização de conceitos da Geometria Analítica através do Micromundo Logo.** IV Congresso RIBIE, Brasília 1998. Disponível em: <http://lsm.dei.uc.pt/ribie/docfiles/txt20034242929234.PDF>. Acesso em: 24 nov. 2015.

VENTURA, Karen Tibursky Alves. VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática – 2013. **Análise dos conteúdos de Geometria Analítica em Livros.** PUC-SP, Brasil.

ANEXO A – CARTILHA DE GEOMETRIA ANALÍTICA: PONTO E RETA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MINAS GERAIS CAMPUS SÃO JOÃO EVANGELISTA MINAS GERAIS
ARLISON FERNANDES DOS SANTOS; EMILSON JÚNIO NOGUEIRA ARAÚJO; WEMERSON JOSÉ SILVA

CARTILHA DE GEOMETRIA ANALÍTICA: PONTO E RETA

SÃO JOÃO EVANGELISTA - MG
2015

APRESENTAÇÃO

É um grande desafio para os pesquisadores em Matemática definir uma Metodologia adequada de trabalho, e que, de fato englobe todas as propostas desejadas pelo pesquisador. Após a verificação das obras didáticas do PNLD de 2012 e de 2015 para o ensino de Matemática, das análises apresentadas no documento do PNLD, e de pesquisas realizadas na área da Educação Matemática em relação ao ensino e aprendizagem de Geometria Analítica no Ensino Médio, optamos por desenvolver essa cartilha com o objetivo de trabalhar algumas propostas metodológicas, que vêm sendo destacadas por pesquisadores em Educação Matemática.

Esta cartilha foi desenvolvida exclusivamente como apoio ao professor de Matemática, para que possa utilizar da proposta didática apresentada nesse material como base para seu trabalho em sala de aula.

A ordem de disposição dos conteúdos segue a maioria das obras didáticas do PNLD para o ensino de Geometria Analítica. Procuramos focar na introdução aos conceitos, dando destaque para o estudo do ponto e da reta. A disposição dos conteúdos está da seguinte forma: Plano Cartesiano, Distância entre dois pontos, Ponto Médio de Segmento, Reta, Determinação de uma reta, Inclinação de uma reta, Condição de alinhamento de três pontos, Equação fundamental da reta, Equação Geral da Reta, Equação Reduzida da Reta.

Ao tratar de alguns assuntos, na introdução, procuramos apresentá-los os de forma contextualizada. No desenvolvimento teórico foi empregada uma linguagem simples, dando ênfase ao uso do *software* GeoGebra nas construções de gráficos. Anexo à cartilha, está um tutorial de uso do *software* GeoGebra como auxílio ao professor. Ao formalizarmos os conceitos em estudo, optamos por apresentar os conceitos básicos, sem aprofundar incialmente.

Ao apresentarmos definições formais do conteúdo em estudo, e, trabalharmos as atividades propostas, baseamo-nos em algumas obras didáticas do PNLD. As principais referências didáticas foram: (Matemática, ciência e aplicações, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo, Nilze de Almeida. Ensino Médio, volume 3) e (Matemática Paiva, de Manoel Paiva. Ensino Médio, volume 3).

Procuramos apresentar um breve relato histórico sobre o desenvolvimento das descobertas associadas ao tópico em estudo. Procuramos complementar esse material com um Manual do Professor, no qual são apresentados, de forma detalhada, os objetivos das propostas apresentadas, e quais os referenciais teóricos que subsidiaram essas propostas.

SUMÁRIO

1. A GEOMETRIA APARECE EM DIVERSAS FORMAS

A PONTE OCTÁVIO FRIAS DE OLIVEIRA.

A ponte Octávio Frias de Oliveira é um marco na arquitetura nacional, pois foi construída com um formato único no mundo: duas pontes em curva formando um X e sustentadas por estais ligados a um único mastro. Uma ponte estaiada é uma ponte suspensa por conjuntos de cabos de aço (os chamados estais, que dão origem ao nome estaiada), conectados a uma torre ou mastro com a função de dar sustentação às suas pistas.

Figura 1 [3]– Ponte Octávio Frias de Oliveira.

Fonte: Postado por Leonardo S.C

Moderna, é construída em locais onde o uso dos pilares não é aconselhável. É considerada a evolução da tradicional ponte pênsil.

[3] Disponível em: <http://estruturasdemetal.blogspot.com.br/> Acesso em: 14 de Jan. 2016.

1.1 GEOMETRIA ANALÍTICA E GEOGRAFIA

Conheça um pouco mais:

Coordenadas geográficas: Latitude, Longitude e GPS.

Entenda o que é latitude, longitude, e como funciona um aparelho de GPS.

Figura 2[4]: GPS

Fonte: Foto encontrada no *site* uol educação

O GPS é um aparelho digital de localização, que determina a posição exata no globo terrestre, ou seja, a latitude e a longitude (coordenadas geográficas). Esse aparelho, de modo geral, disponibiliza ao usuário, outras informações como: a altitude, a direção que está sendo seguida, a distância em relação a um ponto que foi marcado anteriormente, a velocidade no percurso. A localização exata é possível graças à recepção de sinais de um sistema de satélites artificiais. É um aparelho que pode ser utilizado em várias situações: medições de propriedades rurais; fiscalização de áreas florestais para constatação, por exemplo, de desmatamento; orientação para pessoas que estão em regiões desérticas, de florestas etc; em determinadas competições esportivas automobilísticas; na aviação; na navegação; entre outras.

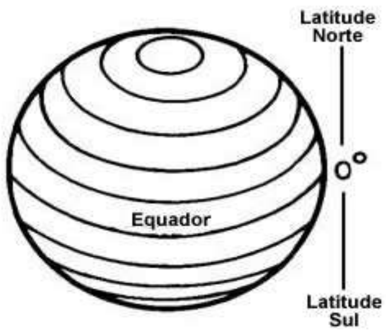
Como você pôde ver, o GPS é um aparelho que, entre outras funções, possibilita a determinação das coordenadas geográficas. Essas coordenadas são um sistema de Paralelos e Meridianos, a partir dos quais podemos determinar valores em graus: latitude, no caso dos paralelos e a longitude, no caso dos meridianos.

O paralelo principal é a linha do Equador, que possui latitude 0º e divide o globo terrestre em dois hemisférios: Norte e Sul. Assim, latitude é a distância em graus de qualquer ponto da superfície terrestre em relação à linha do Equador. A latitude poder ser Norte (N) ou Sul (S) e vai de 0º até 90º. Observe na figura 3 a representação dos paralelos no globo terrestre.

---

[4] Disponível em: <http://educacao.uol.com.br> Acesso em: 14 de Jan. 2016.

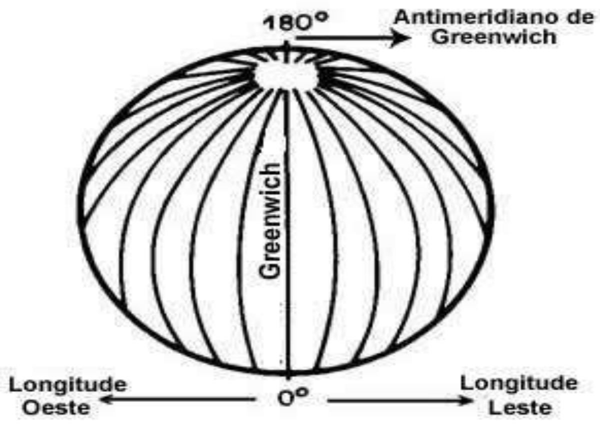
Figura 3 [5]- Representação dos paralelos no globo terrestre



Fonte: Foto encontrada no *site* uol educação

O **meridiano de *Greenwich***, por convenção, foi estabelecido como meridiano principal. Esse meridiano (0º) e o seu anti-meridiano (180º) dividem o globo terrestre em dois hemisférios: Leste (oriental) ou Oeste (ocidental). Assim, longitude é a distância em graus de qualquer ponto da Terra em relação ao meridiano de *Greenwich*. A longitude pode ser Leste (L) ou Oeste (O) e vai de 0º a 180º. Observe a figura a seguir.

Figura 4 [6]- Representação dos meridianos no globo terrestre



Fonte: Foto encontrada no *site* uol educação

A interseção, ou seja, o cruzamento de um paralelo e de um meridiano indica a coordenada geográfica de um ponto sobre a superfície terrestre. Temos, a partir disso, a Latitude e a Longitude, com os quais se pode localizar com precisão, com exatidão, algo na

[5] Disponível em: < http://educacao.uol.com.br> Acesso em: 14 de Jan. 2016.

[6] Disponível em: < http://educacao.uol.com.br> Acesso em: 14 de Jan. 2016.

superfície terrestre, seja num continente, numa ilha, ou num oceano. Ouro Preto, MG, por exemplo, está localizada, aproximadamente, a 20º de latitude Sul e 44º de Longitude Oeste.

Em tempo, o nome do meridiano de *Greenwich* deriva da localidade na região metropolitana de Londres, onde fica o Observatório Real de *Greenwich.*

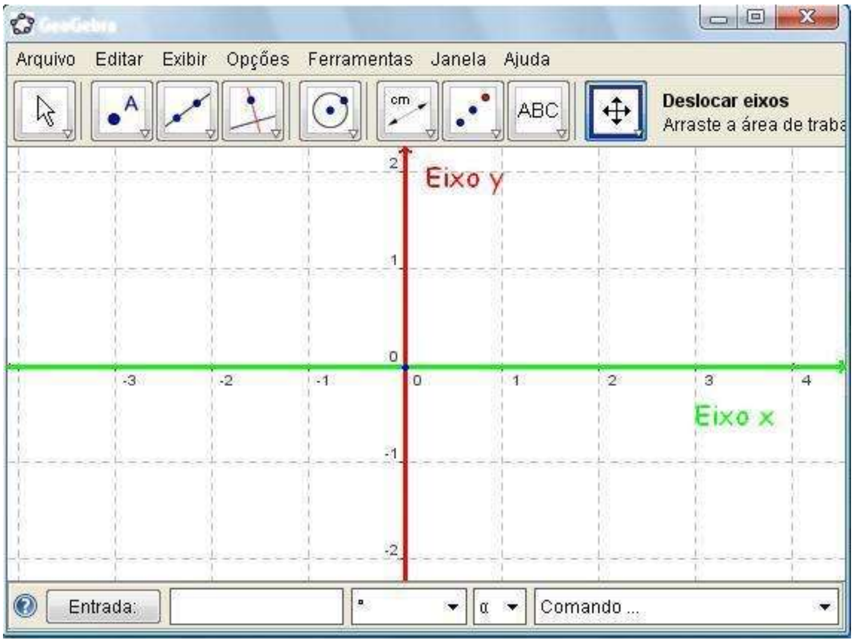
2. PONTO

2.1 PLANO CARTESIANO

Atividades utilizando o *software* GeoGebra

Vamos considerar que o plano cartesiano apresentado no GeoGebra seja o mapa do seu bairro. Consideramos ainda que a origem (local onde os eixos se cruzam) seja sua casa. Observe a representação do plano cartesiano na figura 5.

Figura 5 [7]- Sistema de coordenadas cartesianas



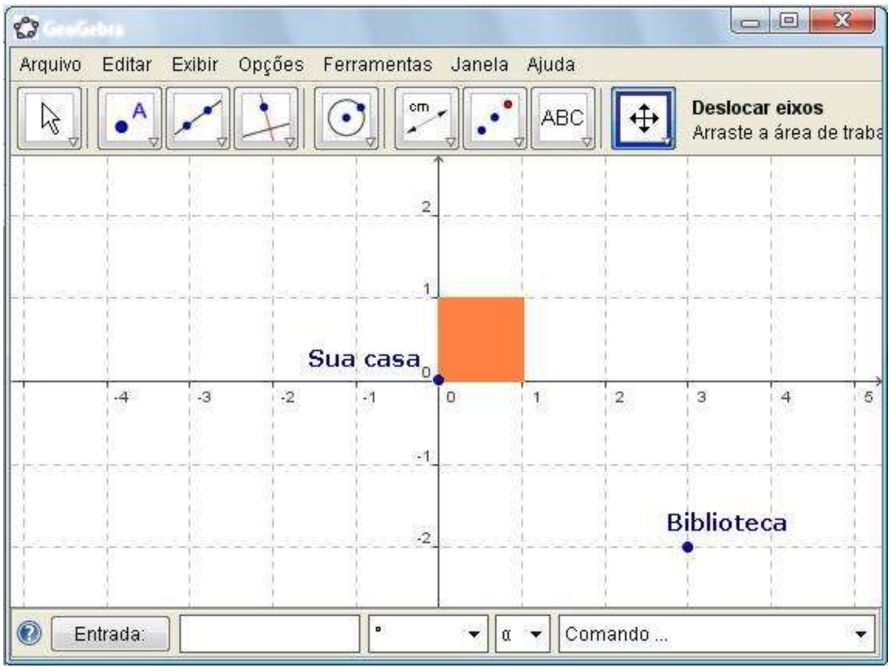
Fonte: Foto encontrada no *site* Geogebristas

Imagine ainda que uma quadra seja um quadrado de lado de medida 1 (como na figura 6).

---

[7] Disponível em: <http://geogebristas.blogspot.com.br/p/lista-de-exercicios-sobre-geometria.html> Acesso em: 14 de Jan. 2016.

Figura 6 [8]- Representação de uma casa no plano cartesiano



Fonte: Foto encontrada no *site* Geogebristas

Então, podemos dizer que a biblioteca está a 3 quadras a Leste de sua casa (para direita) e duas quadras ao Sul de sua casa (para baixo). Vamos adotar o Norte sendo para cima, o Sul sendo para baixo, o Leste para direita e o Oeste para a esquerda.

Atividade 1: Localização de pontos

Utilizando as informações dadas acima, marque com pontos no plano cartesiano do GeoGebra as seguintes localidades (para chegar em cada uma das localidades sempre utilize sua casa como início):

1- A escola está localizada 3 quadras a Oeste e 4 quadras a Norte.
2- O supermercado está localizado 2 quadras a Leste e 5 quadras ao Sul.
3- A lan house está localizado a 1 quadra a Leste e 3 quadras ao Norte.
4- O parque está 7 quadras a Oeste e 3 quadras ao Sul.
5- O teatro está 3 quadras a Oeste e 7 quadras ao Sul.
6- O cinema está a 8 quadras ao Norte.
7- O museu está a 3 quadras ao oeste.

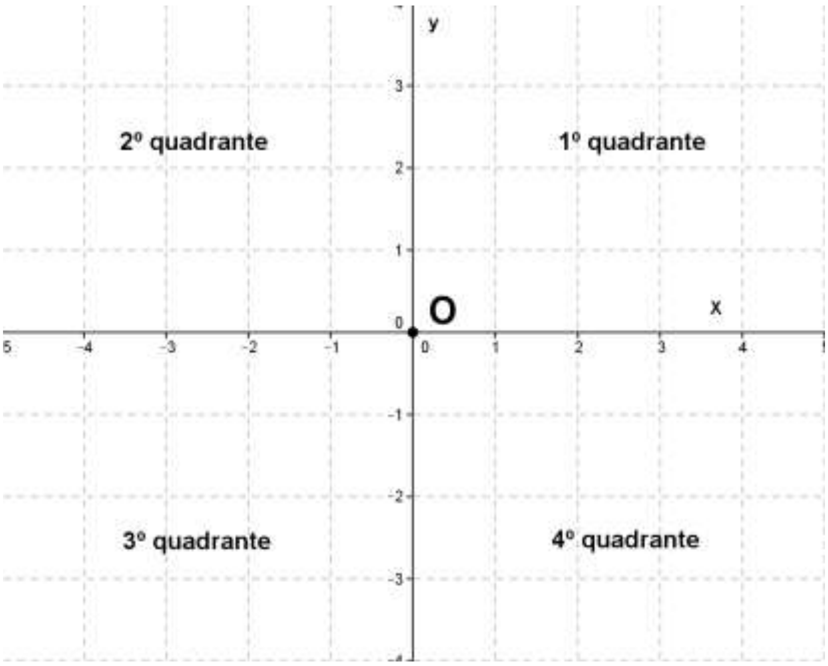
[8] Disponível em: <http://geogebristas.blogspot.com.br/p/lista-de-exercicios-sobre-geometria.html> Acesso em: 14 de Jan. 2016.

DEFINIÇÃO

Plano Cartesiano é um sistema de coordenadas formado por dois eixos x e y perpendiculares entre si que dividem o plano em quatro regiões denominadas quadrantes, (exemplificado na figura 7 a tela inicial do *software* GeoGebra). O nome cartesiano refere-se ao matemático francês René Descartes.

A localização de pontos no plano cartesiano é dada por suas coordenadas, chamadas coordenadas cartesianas.

Figura 7 - Representação dos quadrantes no *software* GeoGebra



Fonte: Arquivo dos autores

Cada uma das partes em que o plano fica dividido pelos eixos x e y recebe o nome de quadrante. Os quatro quadrantes são numerados no sentido anti-horário, como mostra a figura 7.

- O eixo x (ou eixo Ox) recebe o nome de eixo das abscissas;
- O eixo y (ou eixo Oy) recebe o nome de eixo das ordenadas;
- O ponto O é a origem do sistema de eixos cartesianos ortogonais ou retangulares. Esse sistema é frequentemente indicado por xOy;

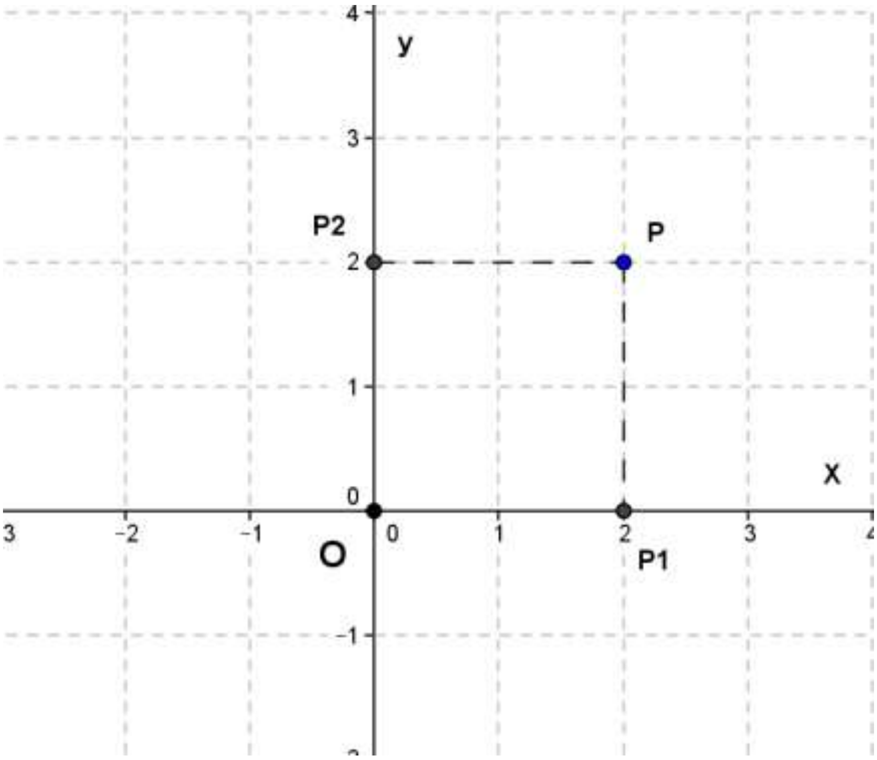
Dado um ponto P qualquer do plano cartesiano, traçamos por P as retas paralelas aos eixos x e y. Sejam P_1 e P_2 os pontos de intersecção dessas retas com os eixos x e y, respectivamente.

Dizemos que:

- A abscissa de P (indica-se por x_p) é a medida algébrica do segmento $\overline{OP}_1$;
- A ordenada de P (indica-se por y_p) é a medida algébrica do segmento $\overline{OP}_2$;

As coordenadas de P são os números reais x_p e y_p indicados, em geral, na forma do par ordenado (x_p, y_p).

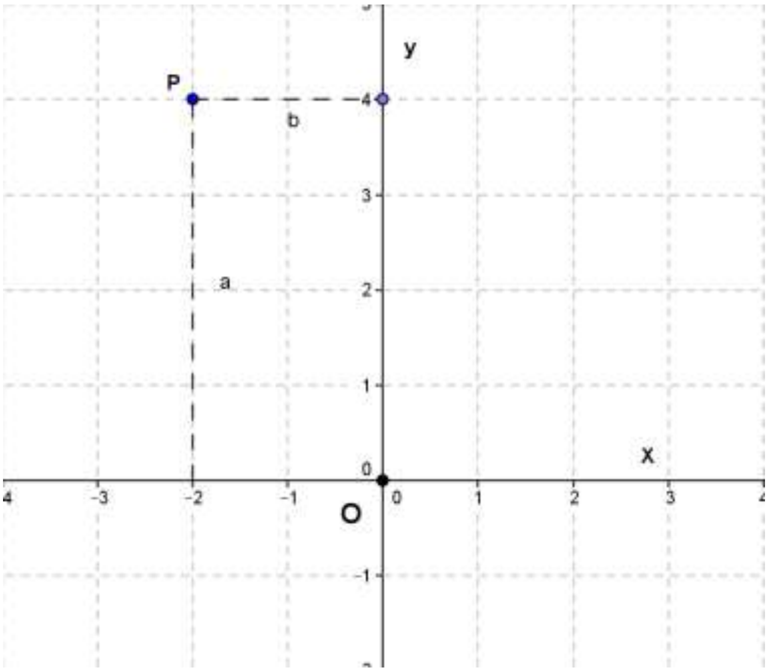
Figura 8 - Representação dos pontos no *software* GeoGebra



Fonte: Arquivo dos autores

Um ponto P possui coordenadas dadas por $P(-2, 4)$. Isso significa que a abscissa de P vale -2 e sua ordenada vale 4. P encontra-se no 2° quadrante.

Figura 9 - Representação dos pontos no *software* GeoGebra



Fonte: Arquivo dos autores

Atividade 2: Noção intuitiva de que a menor distância entre dois pontos é uma reta

Após marcar todas as localidades, responda às seguintes questões:

1. Quantas quadras temos de caminhar para chegarmos em cada localidade partindo de sua casa?
2. Qual a localidade que está mais distante de sua casa? Qual está mais perto?
3. Se pudéssemos atravessar "por dentro" das quadras, qual seria a distância de cada localidade até sua casa?
4. Você caminharia uma menor distância entre sua casa e cada localidade se fosse pelas ruas ou atravessando "por dentro" das quadras?
5. Como você descreveria o trajeto de sua casa a cada localidade se atravessasse "por dentro" das quadras?
6. Se tivermos duas localidades, a menor distância entre elas é descrita por qual tipo de trajetória?

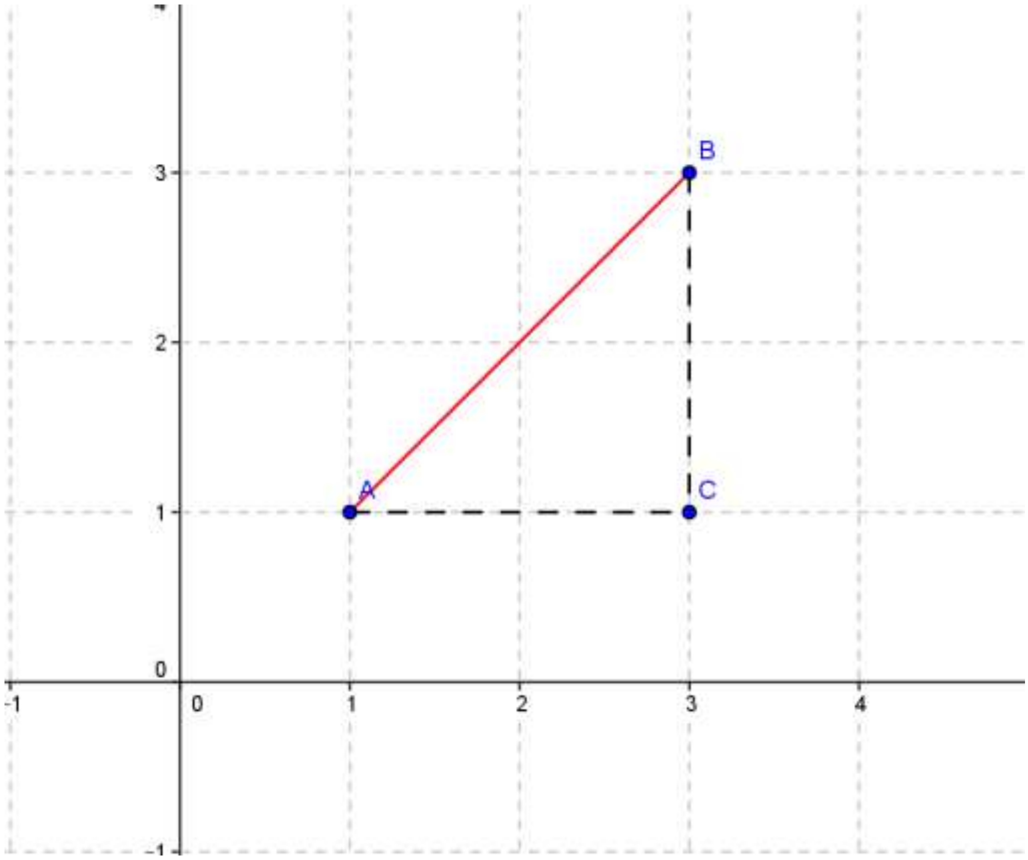
2.2 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

DEFINIÇÃO

Dados dois pontos distintos A e B do plano cartesiano, chama-se distância entre eles à medida do segmento de reta que tem os dois pontos por extremidades.

Indicaremos a distância entre A e B por dAB.

Figura 10 - Representação dos pontos no *software* GeoGebra



Fonte: Arquivo dos autores

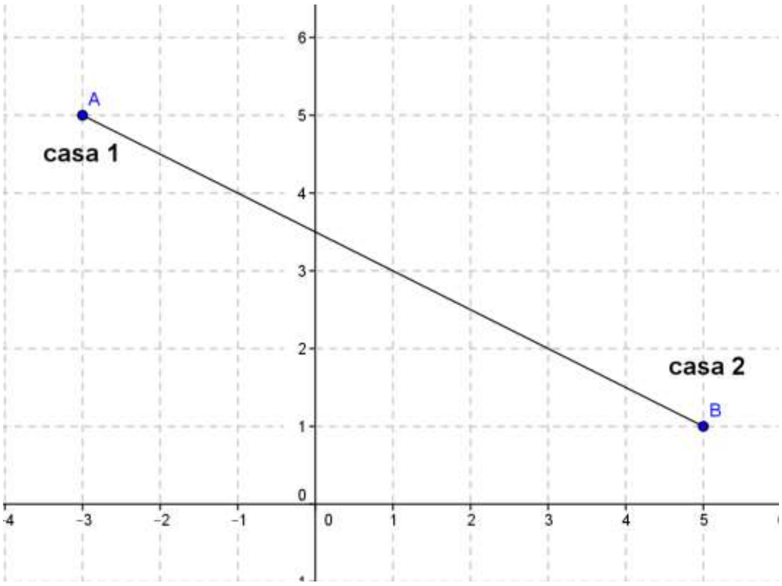
Atividade 3: Considere o seguinte problema

No plano Cartesiano, os pontos A e B representam duas casas de uma propriedade rural. Deseja-se perfurar um poço equidistante às casas, de maneira que essa distância seja a menor possível. Quais devem ser as coordenadas do ponto M onde o poço deve ser perfurado, (observe a figura 11)?

Você saberia determinar as coordenadas deste ponto somente visualizando a figura?

E se não tivéssemos a figura e a única informação fosse as coordenadas dos pontos A e B?

Figura 11 - Representação dos pontos no *software* GeoGebra



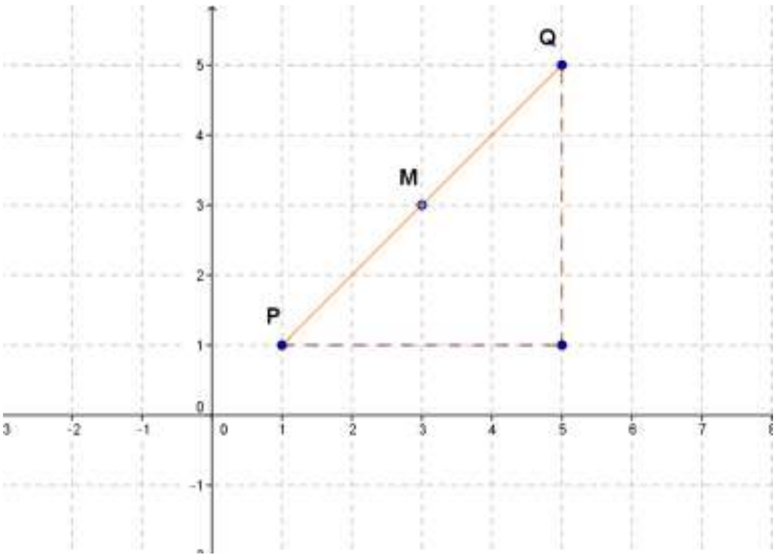
Fonte: Arquivo dos autores

2.3 PONTO MÉDIO

DEFINIÇÃO

Sejam dois pontos do plano cartesiano P e Q. Chamamos de ponto médio do segmento PQ, o ponto M, que pertence a reta PQ e equidista de P e de Q.

Figura 12 - Representação dos pontos no *software* GeoGebra

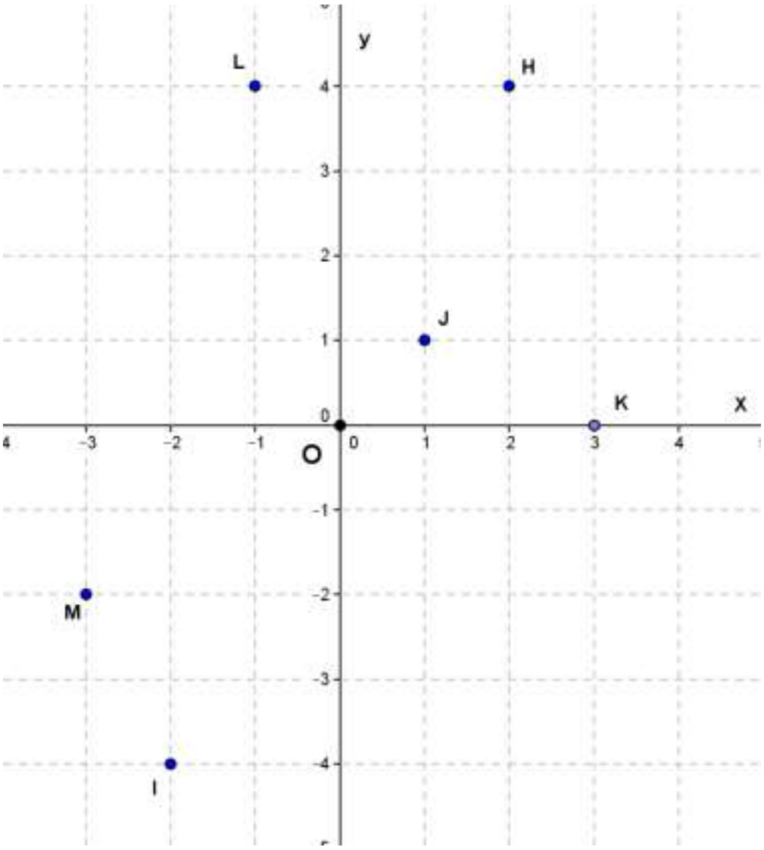


Fonte: Arquivo dos autores

EXERCÍCIOS

1. Situe no mesmo sistema de eixos cartesianos os pontos: $A(1,3)$, $B(-2,1)$, $C(0,-4)$, $D(-3,0)$, $E(-2,-3)$, $F(2,-1)$, $G(3,-4)$ e $H(\frac{5}{2},\frac{1}{2})$.
2. Forneça as coordenadas dos pontos dados no plano cartesiano da figura 13.

Figura 13 - Representação dos pontos no plano cartesiano usando o *software* GeoGebra



Fonte: Arquivo dos autores

3. Dados os seguintes pontos:

A) $(-3,3)$	E) $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$	I) $(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$
B) $(\frac{11}{5},0)$	F) $(0,-5)$	J) $(0,\pi)$
C) $(-4,-5)$	G) $(3,\ \frac{11}{2})$	K) $(-\frac{1}{3},0)$
D) $(0,\sqrt{2})$	H) $(1;\ -3{,}2)$	L) $(-4,2)$

Indique quais pertencem:

a) Ao 1º quadrante.

b) Ao 2º quadrante.

c) Ao 3º quadrante.

d) Ao 4º quadrante.

e) Ao eixo x.

f) Ao eixo y.

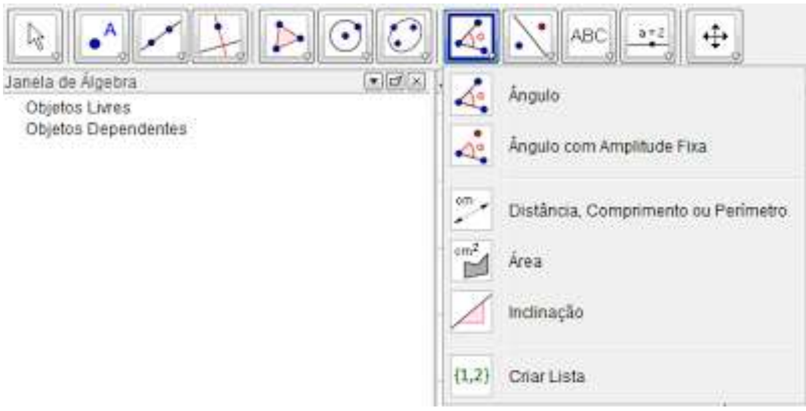
4. Determine a distância entre os pontos $A(2,4)$ e $B(6,1)$

Solução:

Na caixa de entrada, digite os pontos A e B.

No 8º ícone da barra de ferramentas, escolha "Distância, Comprimento ou Perímetro", como indicado na figura 14.

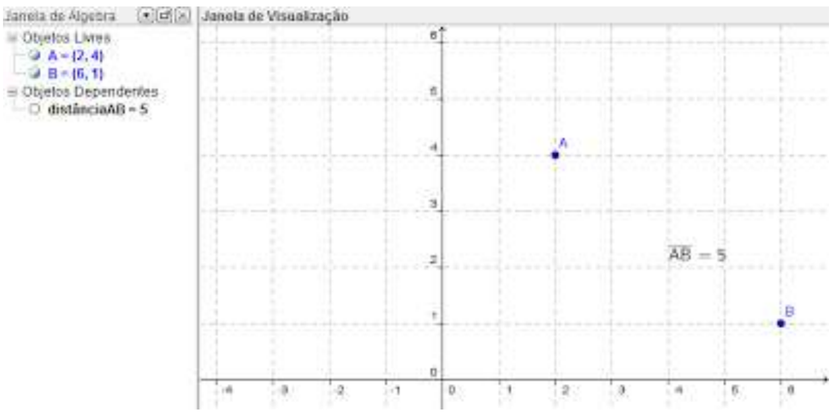
Figura 14 [9]– Distância, comprimento e perímetro



Fonte: Foto encontrada no *site* Geogebristas

Verifique que aparecerá a solução na Janela de Álgebra e também na Janela de Visualização: $d = 5$ (distância $AB = 5$), como indicado na figura 15.

Figura 15 [10]– Indicando os pontos A e B e a distância entre eles no *software* GeoGebra



Fonte: Foto encontrada no *site* Geogebristas

[9] Disponível em: <http://geogebristas.blogspot.com.br/p/lista-de-exercicios-sobre-geometria.html> Acesso em: 14 de Jan. 2016.

[10] Disponível em: <http://geogebristas.blogspot.com.br/p/lista-de-exercicios-sobre-geometria.html> Acesso em: 14 de Jan. 2016.

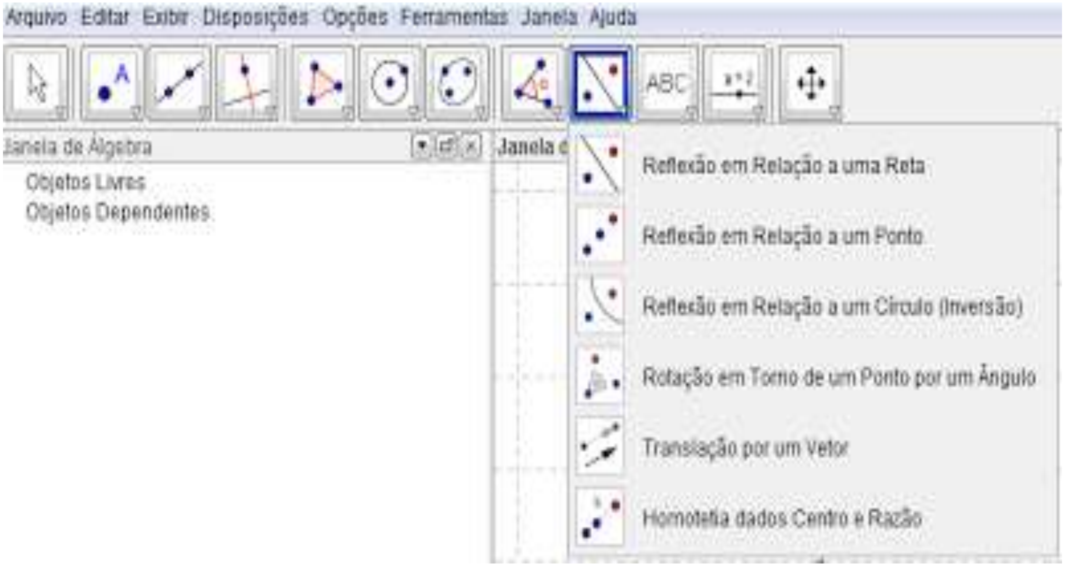
5. Divida o segmento AB em 5 partes iguais, dados $A = (-3,5)$ e $B = (2,-5)$.

Solução:

Na caixa de entrada, digite os pontos A e B.

No 9º ícone da barra de ferramentas, escolha "Homotetia dados Centro e Razão", como indicado na figura 16.

Figura 16 [11]– Usando a ferramenta homotetia dados centro e razão no *software* GeoGebra



Fonte: Foto encontrada no *site* Geogebristas

Clique no ponto A e, em seguida, no ponto B (a ordem aqui é muito importante). Aparecerá uma caixa para digitar a fração em que os pontos que dividirão AB aparecerão a partir do último ponto clicado (neste caso foi B). Digite 1/5 e tecle <ENTER>.

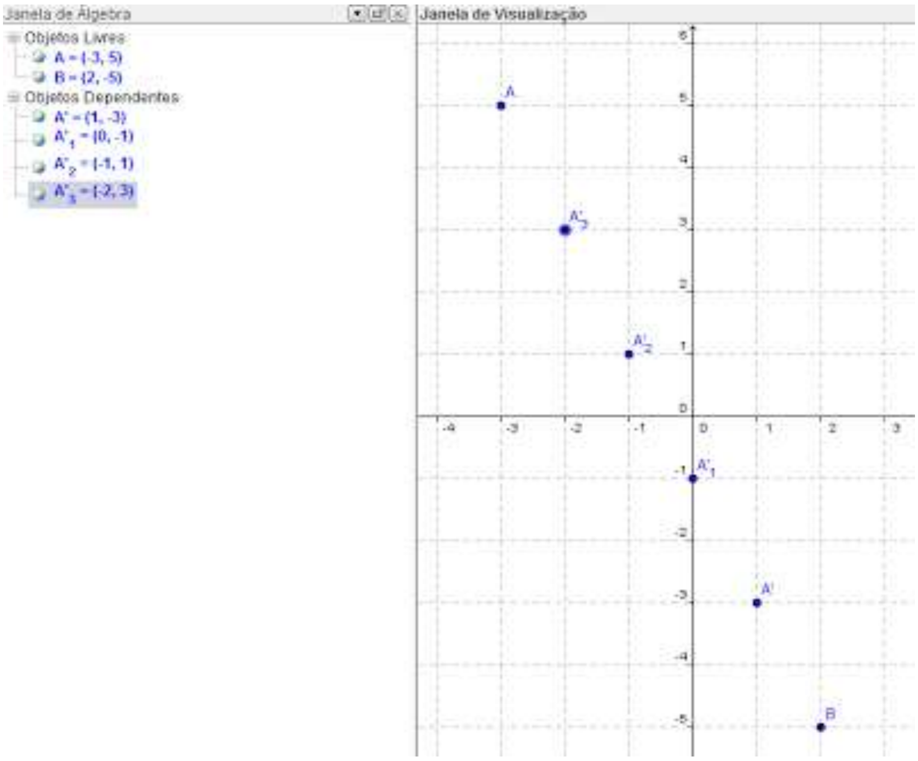
Repita o procedimento para os próximos pontos. Assim:

- Clique no ponto A e, em seguida, no ponto B. Digite 2/5.
- Clique no ponto A e, em seguida, no ponto B. Digite 3/5.
- Clique no ponto A e, em seguida, no ponto B. Digite 4/5.

Verifique que aparecerá na Janela de Visualização a solução, que são os pontos: $(1,-3)$; $(0,-1)$; $(-1,1)$; $(-2,3)$, como indicado na figura 17.

[11] Disponível em: <http://geogebristas.blogspot.com.br/p/lista-de-exercicios-sobre-geometria.html> Acesso em: 14 de Jan. 2016.

Figura 17 [12]– Distancia entre os pontos A e B particionados em 5 partes iguais



Fonte: Foto encontrada no *site* Geogebristas

6. Determine o ponto médio entre $A = (-4, 1)$ e $B = (-2, 5)$.

Solução:

Na caixa de entrada (figura 18), digite os pontos A e B.

Figura 18 [13]– Usando a ferramenta Ponto médio ou centro

Fonte: Foto encontrada no *site* Geogebristas

[12] Disponível em: <http://geogebristas.blogspot.com.br/p/lista-de-exercicios-sobre-geometria.html> Acesso em: 14 de Jan. 2016.

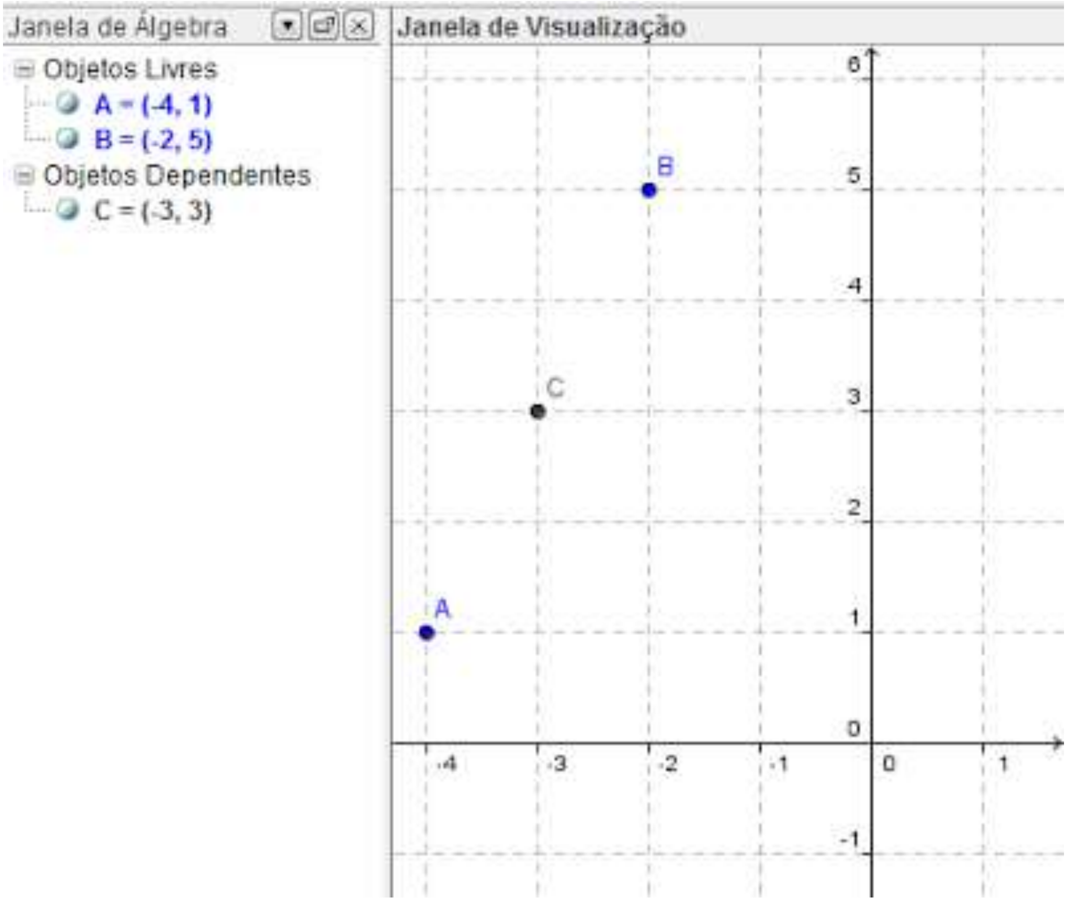
[13] Disponível em: <http://geogebristas.blogspot.com.br/p/lista-de-exercicios-sobre-geometria.html> Acesso em: 14 de Jan. 2016.

No 2º ícone da barra de ferramentas, escolha "Ponto Médio ou Centro".

Na Janela de Visualização ou na Janela de Álgebra, clique no ponto A e, em seguida, no ponto B (pode ser em B e depois em A).

Verifique que aparecerá na Janela de Visualização e na Janela de Álgebra (figura 19), a seguinte solução: $C = (-3{,}3)$.

Figura 19 [14]- Representação dos pontos A, B e C no plano cartesiano usando o *software* GeoGebra



Fonte: Foto encontrada no *site* Geogebristas

[14] Disponível em: <http://geogebristas.blogspot.com.br/p/lista-de-exercicios-sobre-geometria.html> Acesso em: 14 de Jan. 2016.

3. CALCULANDO DISTÂNCIAS UTILIZANDO COORDENADAS GEOGRÁFICAS

Antes de iniciar este estudo, é preciso conhecer os conceitos de DLA (diferença de latitude) e DLO (diferença de longitude).

A primeira – DLA – é a diferença angular entre duas latitudes, podendo ser de no máximo 180 graus, pois é a diferença entre 90ºN e 90ºS.

A segunda – DLO – é a menor diferença angular entre duas longitudes, podendo ser, também, de no máximo 180 graus, pois é a diferença entre a longitude de um meridiano qualquer e seu antemeridiano (oposto a ele em 180º).

Para se calcular a distância entre duas localidades apenas sabendo-se as coordenadas, precisaremos também lembrar como converter estes valores de DLA e DLO em distância.

Para se calcular a direção entre duas localidades será necessário relembrar conceitos de trigonometria, como veremos mais à frente.

Transformando um valor de DLA ou DLO em distância:

Para transformar um valor angular em distância, basta relembrar suas equivalências.

A unidade de medida de distância utilizada neste contexto será NM (Milhas Náuticas).

NM = Milhas Náuticas. Um NM equivale a aproximadamente 1852 metros ou 1,852 Km.

Temos que, 1º = 60 NM, assim pode-se concluir que 60′ = 60 NM \ 1′ = 1 NM.

Ocorre que 1′ = 60″, assim pode-se concluir que 60″ = 1 NM, ou seja, 1″ = 1/60 NM.

Sabendo-se estas equivalências, fica fácil transformar qualquer valor de DLA ou DLO em distâncias. Observe o exemplo a seguir.

Vamos converter o valor 23º 30' 36" em distância. Basta isolar cada valor e converter individualmente, somando os resultados.

$23.60 = 1380$

$$30' \cdot 1 = 30$$

$$36'' \div 60 = 0{,}6$$

$$1.380 \ + \ 30 \ + \ 0{,}6 \ = \ 1.410{,}6\,NM\,x\,1{,}852 \ = \ 2.612{,}4\,Km.$$

Obviamente, este método vale para distâncias pequenas (menores do que 800 NM), pois o correto seria levar em conta a curvatura terrestre; no entanto, o método funciona muito bem, como veremos adiante.

Calculando a distância entre dois pontos geográficos

Pode ocorrer de, em determinado momento, o piloto ter as coordenadas entre dois pontos, mas não ter em mãos a carta ou algum equipamento para calcular a distância entre elas. Quando isto acontecer, basta utilizar o que já se conhece sobre coordenadas geográficas. Já foi visto que uma coordenada geográfica utiliza o sistema cartesiano para indicar localidades. Fazendo uma análise simples, qualquer coordenada pode ser representada em um sistema de eixos do tipo “x” e “y”.

Sistema Cartesiano é um sistema formado por dois eixos perpendiculares utilizado na matemática para localizar pontos no plano.

Vamos pegar como exemplo as coordenadas geográficas das duas cabeceiras da pista de SBMT (Aeroporto Campo de Marte, São Paulo):

SBMT: PISTA 12 (23º 30’ 29,93” S/046º 38’ 32,90” W)

SBMT: PISTA 30 (23º 30’ 36,50” S/046º 37’ 53,01” W)

Figura 20 [15]- Coordenadas geográficas das duas cabeceiras da pista de SBMT

Fonte: Foto de Carlos Eduardo Falconi

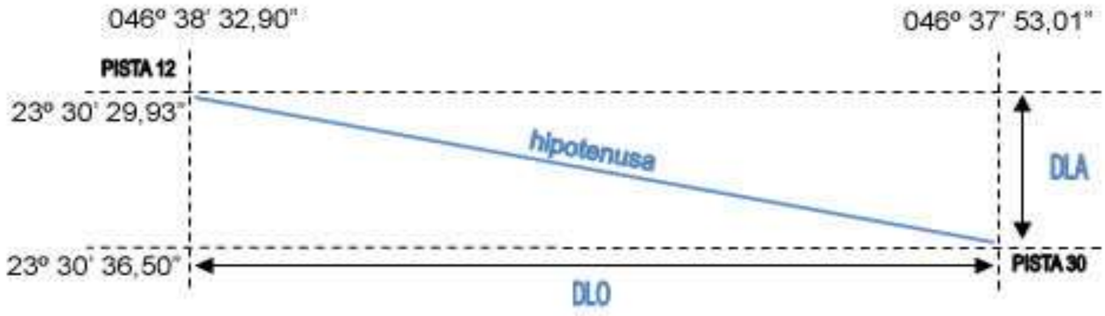
Vamos agora calcular o comprimento da pista, utilizando as duas coordenadas.

Basta uma pequena análise para se perceber que o comprimento da pista é definido por uma linha que liga os dois pontos e que esta linha nada mais é do que a hipotenusa de um triângulo retângulo definido pelas diferenças de latitude (DLA) e de longitude (DLO), que são os catetos entre estes pontos.

[15] Disponível em: <http://www.pilotopolicial.com.br/calculando-distancias-e-direcoes-utilizando-coordenadas geograficas/> Acesso em: 14 de Jan. 2016.

Veja o esquema abaixo:

Figura 21 [16]- Coordenadas geográficas das duas cabeceiras da pista de SBMT



Fonte: Figura de Carlos Eduardo Falconi

Pelo Teorema de Pitágoras, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Podemos considerar que um dos catetos é a DLA e o outro a DLO, sendo a hipotenusa o comprimento da pista (ou a distância entre os dois pontos). Assim, valerá sempre a fórmula:

$$\mathbf{COMPRIMENTO\ 2\ =\ DLA\ 2\ +\ DLO\ 2}$$

Vamos, então, calcular as DLA e DLO:

DLA = 23º 30' 36,50" – 23º 30' 29,93" = 6,57"

DLO = 046º 38' 32,90" – 046º 37' 53,01" = 39,89"

Sabendo o valor das DLA e DLO, basta transformá-las em distância, dividindo-as por 60:

DLA = 6,57" ÷ 60 = 0,1095 NM x 1.852 = 202,8 metros.

DLO = 39,89" ÷ 60 = 0,6648 NM x 1.852 = 1.231,2 metros.

Colocando-se os valores na fórmula:

COMPRIMENTO ^{2} = 202,8 ^{2} + 1.231,2 ^{2} = raiz (41.127,84 + 1.515.853,44).

COMPRIMENTO = 1.247,8 metros.

---

16 Disponível em: <http://www.pilotopolicial.com.br/calculando-distancias-e-direcoes-utilizando-coordenadas geograficas/> Acesso em: 14 de Jan. 2016.

4. SURGIMENTO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

A Geometria, como ciência dedutiva, foi criada pelos gregos. Mas, apesar do seu brilhantismo faltava operacionalidade à geometria grega. E isto só iria ser conseguido mediante a Álgebra como princípio unificador. Os gregos, porém, não eram muito bons em álgebra. Mais do que isso, somente no século XVII a álgebra estaria razoavelmente aparelhada para uma fusão criativa com a geometria.

Ocorre, porém, que o fato de haver condições para uma descoberta não exclui o toque de genialidade de alguém. E no caso da geometria analítica, fruto dessa fusão, o mérito não foi de uma só pessoa. Dois franceses, Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650), curiosamente ambos graduados em Direito, nenhum deles matemático profissional, são os responsáveis por esse grande avanço científico: o primeiro movido basicamente por seu grande amor à Matemática e o segundo, por razões filosóficas. E, diga-se de passagem, não trabalharam juntos: a Geometria Analítica é um dos muitos casos, em ciência, de descobertas simultâneas e independentes.

Se o bem-sucedido Pierre de Fermat, zeloso e competente conselheiro junto ao Parlamento de Toulouse, dedicava muitas de suas melhores horas de lazer à matemática, certamente não era porque faltasse, alguém em sua posição, outras maneiras de preencher o tempo disponível. Na verdade, Fermat simplesmente não conseguia, fugia à sua verdadeira vocação e, apesar de praticar matemática como *hobby*, nenhum de seus contemporâneos contribuiu tanto para o avanço desta ciência quanto ele. Além da Geometria Analítica, Fermat teve papel fundamental na criação do Cálculo Diferencial, do Cálculo de Probabilidades e, especialmente, da Teoria dos Números, ramo da matemática que estuda as propriedades dos números inteiros.

A contribuição de Fermat à Geometria Analítica encontra-se num pequeno texto intitulado Introdução aos Lugares Planos e Sólidos e data no máximo, de 1636, mas, que só foi publicado em 1679, postumamente, junto com sua obra completa. É que Fermat, bastante modesto, era avesso a publicar seus trabalhos. Disso resulta, em parte, o fato de Descartes comumente ser mais lembrado como criador da Geometria Analítica.

O interesse de Descartes pela matemática surgiu cedo, no “College de la Fleche”, escola do mais alto padrão, dirigida por jesuítas, na qual ingressara aos oito anos de idade.

Mas por uma razão muito especial e que já revelava seus pendores filosóficos: a certeza que as demonstrações ou justificativas matemáticas proporcionam. Aos vinte e um anos de idade, depois de frequentar rodas matemáticas em Paris (além de outras) já graduado em Direito, ingressa voluntariamente na carreira das armas, uma das poucas opções “dignas” que se ofereciam a um jovem como ele, oriundo da nobreza menor da França. Durante os quase nove anos que serviu em vários exércitos, não se sabe de nenhuma proeza militar realizada por Descartes. É que as batalhas que ocupavam seus pensamentos e seus sonhos travavam-se no campo da ciência e da filosofia.

A Geometria Analítica de Descartes apareceu em 1637 no pequeno texto chamado “A Geometria” como um dos três apêndices do Discurso do Método, obra considerada o marco inicial da filosofia moderna. Nela, em resumo, Descartes defende o método matemático como modelo para a aquisição de conhecimentos em todos os campos.

A Geometria Analítica, como é hoje, pouco se assemelha às contribuições deixadas por Fermat e Descartes. Inclusive sua marca mais característica, um par de eixos ortogonais, não usada por nenhum deles. Mais, cada um a seu modo, sabiam que a ideia central era associar equações às curvas e superfícies. Neste particular, Fermat foi mais feliz. Descartes superou Fermat na notação algébrica.

Texto de Higino H. Domingues

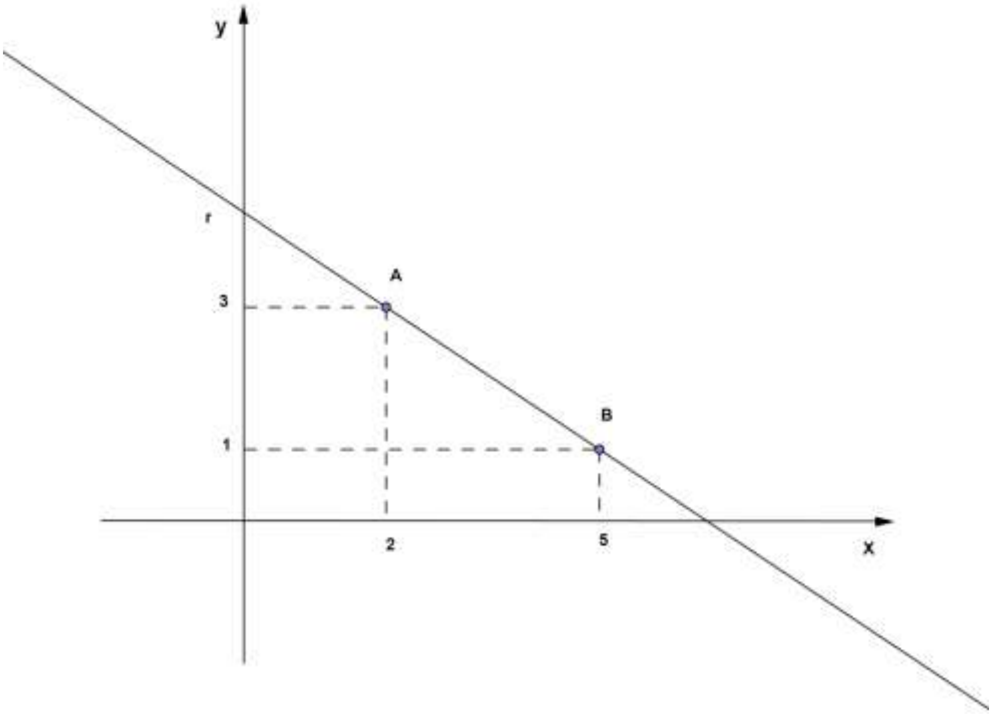
5. RETA

5.1 DETERMINAÇÃO DE UMA RETA

Atividades a serem propostas utilizando o *software* GeoGebra.

Conhecendo as coordenadas de dois pontos distintos de uma reta, podemos representa-lo no plano cartesiano, pois dois pontos distintos determinam uma reta. Por exemplo, dados os pontos $\boldsymbol{A}(\mathbf{2},\mathbf{3})$ e $\boldsymbol{B}(\mathbf{5},\mathbf{1})$ (figura 22), de uma reta $\boldsymbol{r}$, a representação de $\boldsymbol{r}$ é:

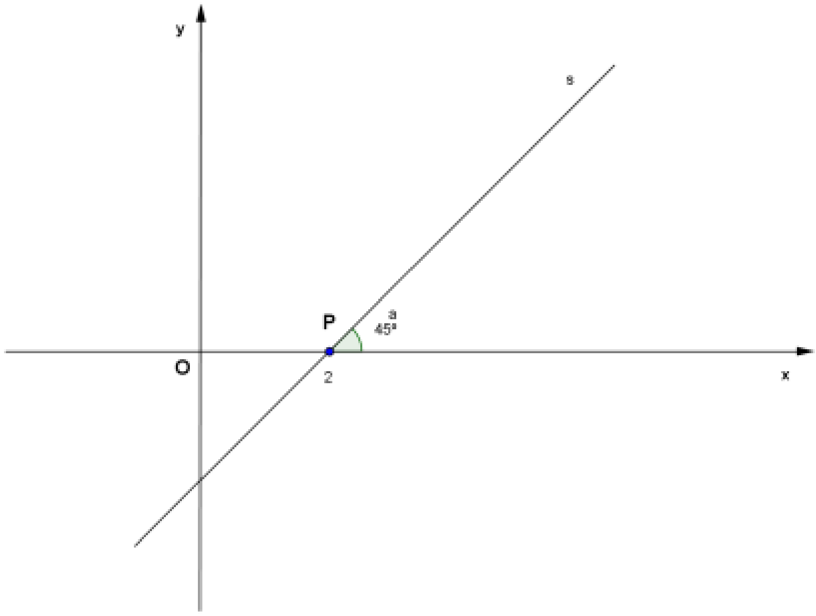
Figura 22 - Representação da reta $\boldsymbol{r}$ no plano cartesiano usando o *software* GeoGebra



Fonte: Arquivo dos autores

Há, porém, outras maneiras de determinar uma reta no plano cartesiano. Por exemplo, sabendo-se que uma reta s passa pelo ponto $P(2,0)$ e forma com o eixo Ox um ângulo de 45° (medido no sentido anti-horário a partir de um ponto do eixo Ox à direita de P), a reta s está assim determinada na figura 23.

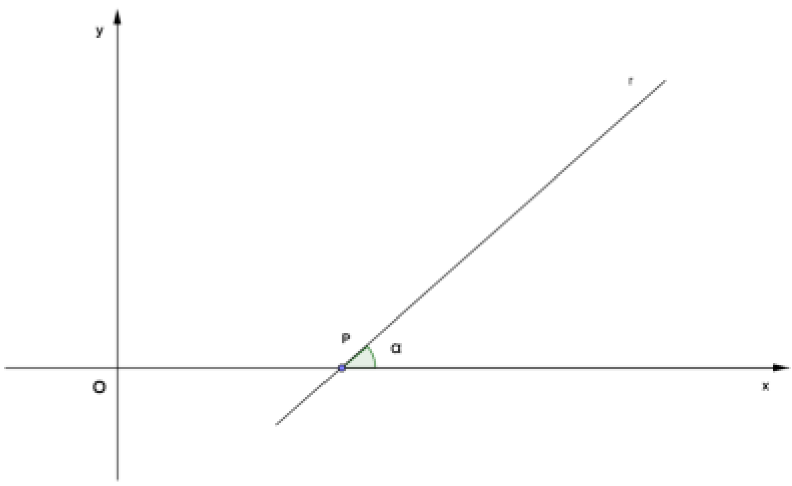
Figura 23 - Representação da reta s no plano cartesiano usando *software* GeoGebra



Fonte: Arquivo dos autores

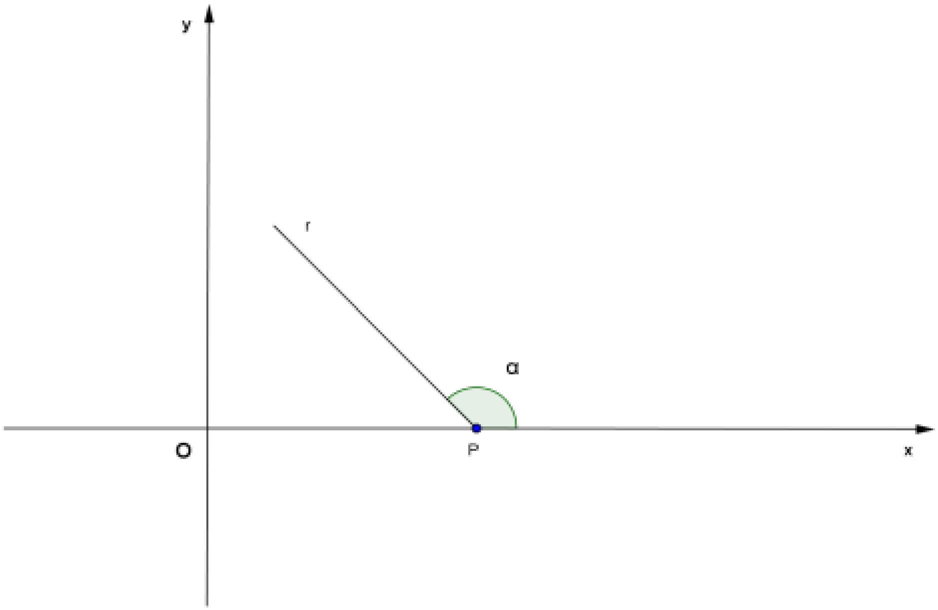
No plano cartesiano xOy, seja r uma reta que intercepta o eixo das abscissas em um ponto P e forma com esse eixo um ângulo de medida α, com $0° \leq \alpha \geq 180°$, medido no sentido anti-horário a partir de um ponto do eixo Ox à direita de P. A medida α (figura 24 e 25), é chamada de Inclinação da reta r.

Figura 24 - Representação do ângulo α no plano cartesiano usando *software* GeoGebra



Fonte: Arquivo aos autores

Figura 25 - Representação do ângulo α no plano cartesiano usando software GeoGebra.

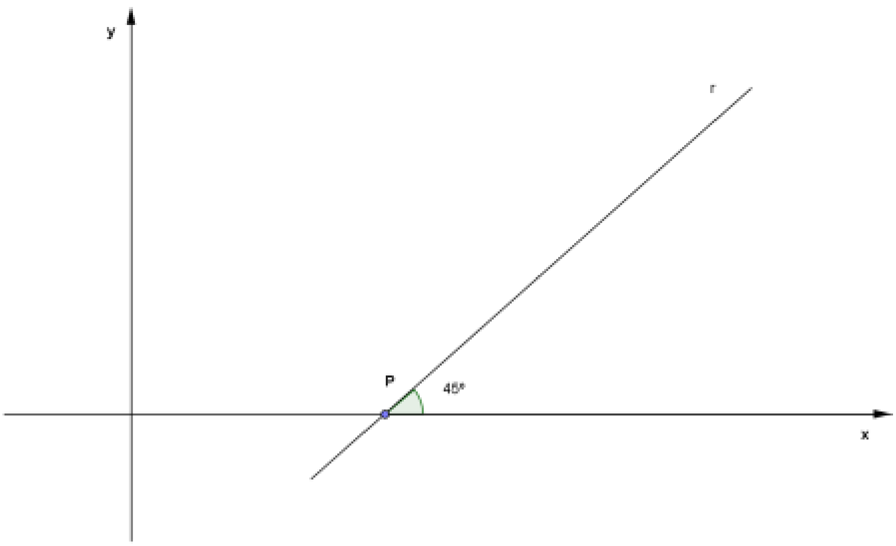


Fonte: Arquivo dos autores.

5.2 COEFICIENTE ANGULAR

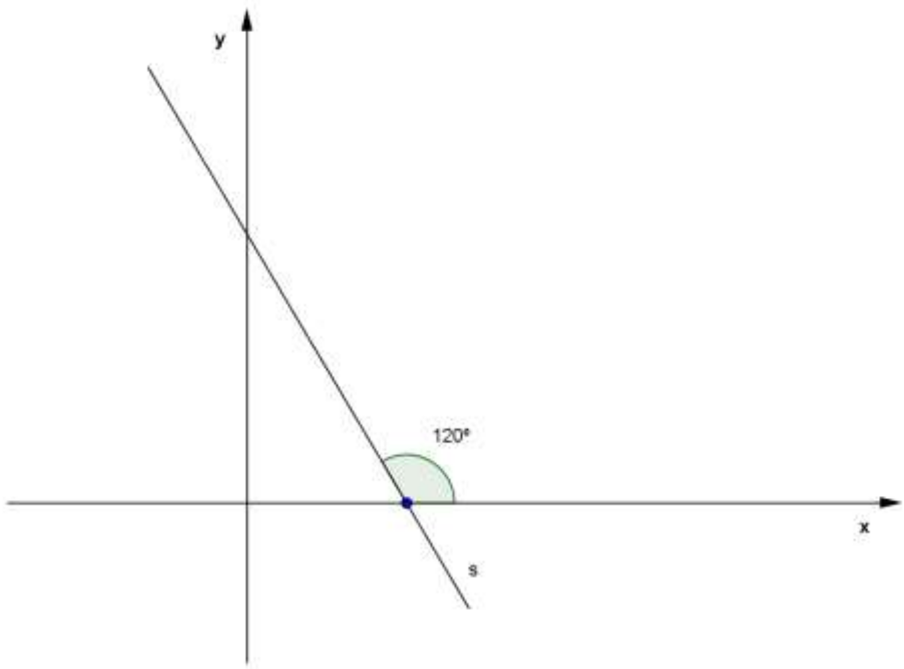
Chama-se **coeficiente angular** de uma reta $\boldsymbol{r}$ de inclinação α, com $\alpha \neq 90°$, o número $\boldsymbol{m}$ tal que: $m = tg\ \alpha$. Observe nas figuras de 26 a 29.

Figura 26 - Representação de reta oblíqua r no plano cartesiano usando o *software* GeoGebra



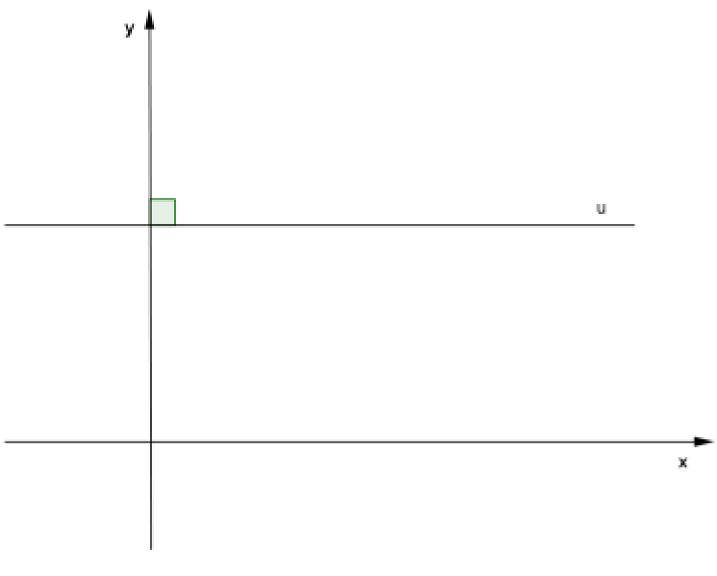
Fonte: Arquivo dos autores

Figura 27 - Representação de reta oblíqua s no plano cartesiano usando o *software* GeoGebra



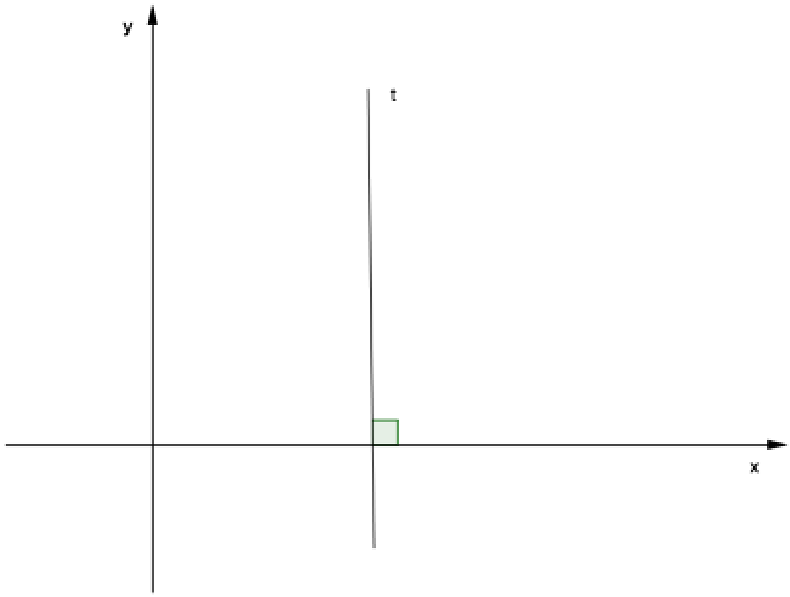
Fonte: Arquivo dos autores

Figura 28 - Representação de reta horizontal u no plano cartesiano usando o *software* GeoGebra



Fonte: Arquivo dos autores

Figura 29 - Representação de reta vertical t no plano cartesiano usando o *software* GeoGebra



Fonte: Arquivo dos autores

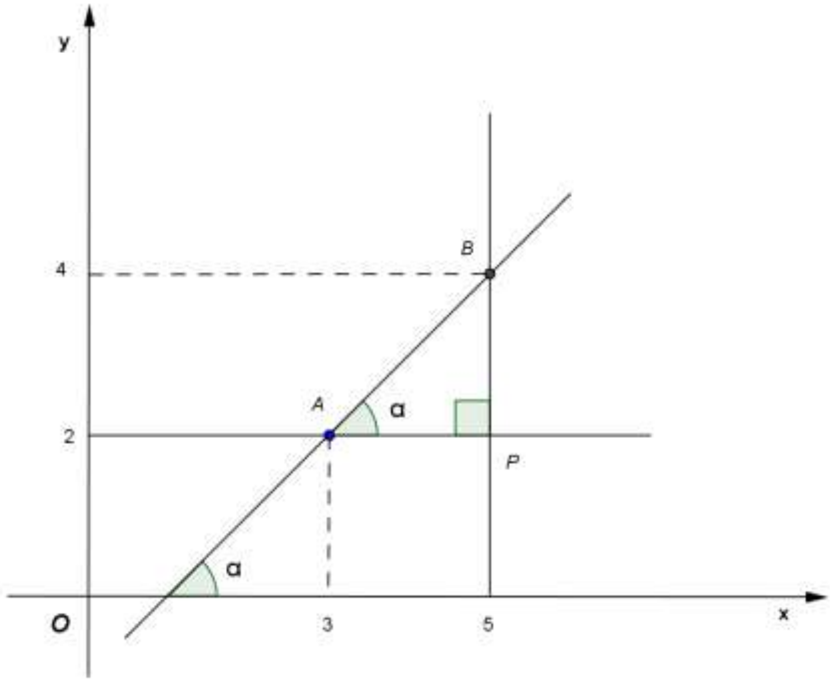
Notas:

1. Retas com 0° de inclinação (paralelas ao eixo Ox) são chamadas de retas horizontais.
2. Retas com 90° de inclinação (paralelas ao eixo Oy) são chamadas de retas verticais.
3. Retas não verticais e não horizontais são chamadas de retas oblíquas.

5.3 CÁLCULO DO COEFICIENTE ANGULAR DE UMA RETA NÃO VERTICAL POR DOIS DE SEUS PONTOS

Consideramos a reta $\overleftrightarrow{AB}$, de inclinação α, em que $A(3,2)$ e $B(5,4)$. Traçando por A a reta paralela ao eixo Ox e por B a reta paralela ao eixo Ou, determinamos o triângulo retângulo ABP cujo ângulo interno $B\hat{A}P$ tem medida α (representado na figura 30).

Figura 30 - Representação do triângulo retângulo no plano cartesiano usando o software GeoGebra



Fonte: Arquivo dos autores

No triângulo ABP podemos calcular tg α, que é o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$:

$$m = tg\ \alpha = \frac{4-2}{5-3} = \frac{2}{2} = 1$$

Note, portanto, que o coeficiente angular é a razão da diferença das ordenadas para a diferença das abscissas dos pontos A e B.

O teorema a seguir generaliza o cálculo do coeficiente angular de uma reta não vertical $\overleftrightarrow{AB}$, qualquer que seja sua posição no plano cartesiano.

Se os pontos distintos $A(x_A, y_A)$ $B(x_{B,}\ y_B)$ pertencem a uma reta r não vertical, então o coeficiente angular m, da reta r é dado por:

$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Nota:

Multiplicando por -1 o numerador da fração $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, obtém-se uma fração equivalente a ela; logo: $m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$. Por isso, podemos simplificar a notação, escrevendo:

$m_r = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$, em que Δx e Δy representam as diferenças entre as abscissas e entre as ordenadas, respectivamente, obtidas em um mesmo sentido: ambas de A para B, $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, ou ambas de B para A, $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$.

Atividade 1:

1. Determine a inclinação da reta formada pelos pontos $A(0,1)$ e $B(-3,4)$.

Método do cálculo do coeficiente angular de uma reta a partir de dois pontos dados

Temos os pontos $A(0,1)$ e $B(-3,4)$. Aplicando a fórmula para o cálculo do coeficiente angular, temos:

$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \frac{(4-0)}{(-3-1)} \Rightarrow m = \frac{(4)}{(-4)} \Rightarrow m = -1$$

A reta forma com o eixo x um ângulo de 135º.

Método utilizado através do *software* GeoGebra

Solução:

Na caixa de entrada (figura 31), digite os pontos A e B.

Na caixa de entrada, digite "reta [A, B]", ou no 4º ícone da barra de ferramentas, escolha "Reta definida por Dois Pontos".

Figura 31 [17]– Construindo uma reta definida por dois pontos

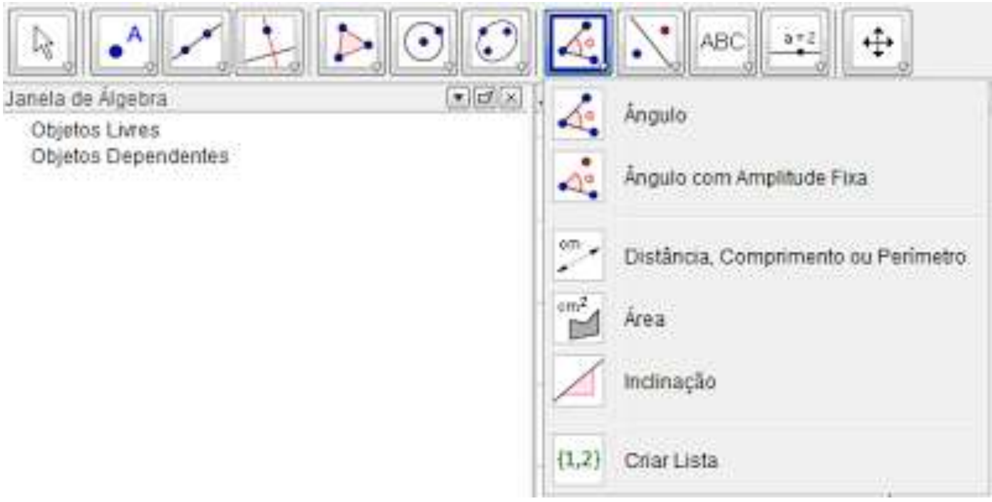
Fonte: Foto encontrada no *site* Geogebristas

[17] Disponível em: <http://geogebristas.blogspot.com.br/p/lista-de-exercicios-sobre-geometria.html> Acesso em: 14 de Jan. 2016.

Na Janela de Álgebra ou na Janela de Visualização, clique no ponto A e, em seguida, no ponto B.

No 8º ícone da barra de ferramentas (figura 32), escolha "Inclinação".

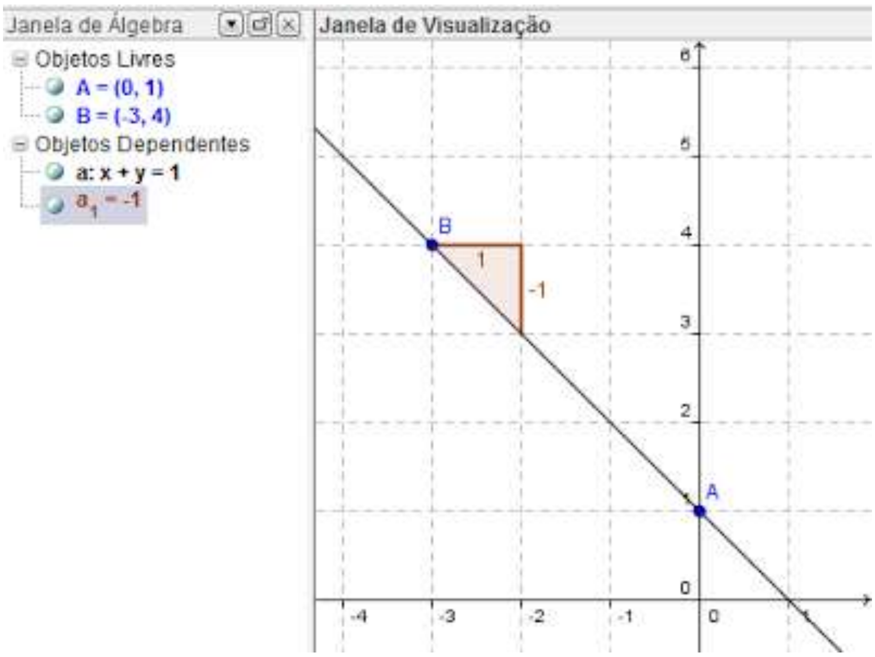
Figura 32 [18]– Usando a ferramenta inclinação de uma reta



Fonte: Foto encontrada no *site* Geogebristas

Verifique que aparecerá na Janela de Álgebra (figura 33), a seguinte solução: $a1 = -1$ e na Janela de Visualização:

Figura 33 [19]– Indicando a inclinação da reta



Fonte: Foto encontrada no *site* Geogebristas

[18] Disponível em: <http://geogebristas.blogspot.com.br/p/lista-de-exercicios-sobre-geometria.html> Acesso em: 14 de Jan. 2016.

[19] Disponível em: <http://geogebristas.blogspot.com.br/p/lista-de-exercicios-sobre-geometria.html> Acesso em 14 de Jan. 2016.

5.4 CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS

Os pontos $A(3,1)$, $B(5,2)$ e $C(9,4)$, representados ao lado, são colineares? Isto é, pertencem à mesma reta?

Para responder a essa pergunta, não basta traçar a reta $\overleftrightarrow{AB}$ com o auxílio de uma régua, pois o ponto C pode estar fora dessa reta a uma distância tão pequena que não seja detectada graficamente. Por isso, vamos usar o conceito de coeficiente angular e a seguinte propriedade:

Se duas retas são paralelas e têm um ponto comum, então elas são **paralelas coincidentes.**

Indicando por m_{AB} e m_{BC} os coeficientes angulares das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, respectivamente, calculamos:

$$m_{AB} = \frac{2-1}{5-3} = \frac{1}{2} \text{ e } m_{BC} = \frac{4-2}{9-5} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Como $m_{AB} = m_{BC}$, deduzimos que $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ têm a mesma inclinação; logo, essas retas são paralelas. Além de paralelas, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ têm o ponto B em comum e, portanto, são paralelas coincidentes, com o que concluímos que os pontos A, B e C são colineares.

Podemos generalizar a condição de alinhamento de três pontos pelo teorema a seguir.

Três pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, são colineares se, e somente se, $m_{AB} = m_{BC}$ ou não existem m_{AB} e m_{BC}.

Nota:

Se três pontos D, E e F do plano cartesiano são tais que não existem os coeficientes angulares das retas $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{EF}$, então essas retas são verticais e, portanto, paralelas. Como, além de paralelas, as retas $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ têm o ponto E em comum, concluímos que essas retas são paralelas coincidentes; logo, os pontos D, E e F são colineares.

Atividade:

1. Verifique se os pontos $A(1{,}5)$, $B(3{,}2)$ e $C(6,-2)$ estão alinhados.

Método de comparação do coeficiente angular a cada dois pontos

Para que esses três pontos estejam alinhados, é necessário que o coeficiente angular da reta que passa por A e por B seja o mesmo coeficiente angular da reta que passa por B e por C, ou então por A e por C. Através do cálculo dos coeficientes angulares, temos:

$$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{(2-5)}{(3-1)} = \frac{(-2-2)}{(6-3)} \Rightarrow \frac{-3}{2} = \frac{-4}{3}$$

Como temos coeficientes angulares diferentes, logo os três pontos não pertencem à mesma reta ou a retas coincidentes. Portanto eles não estão alinhados.

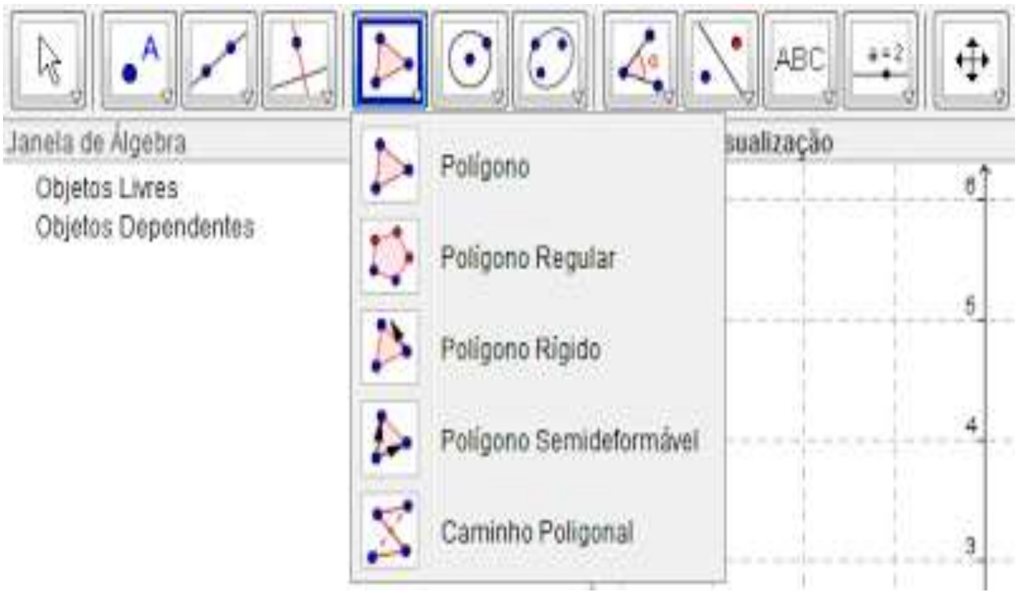
Método utilizado através do *software* GeoGebra

Solução:

Na caixa de entrada, digite os pontos A, B e C.

No 5º ícone da barra de ferramentas, escolha "Polígono".

Figura 34 [20]– Construindo polígono



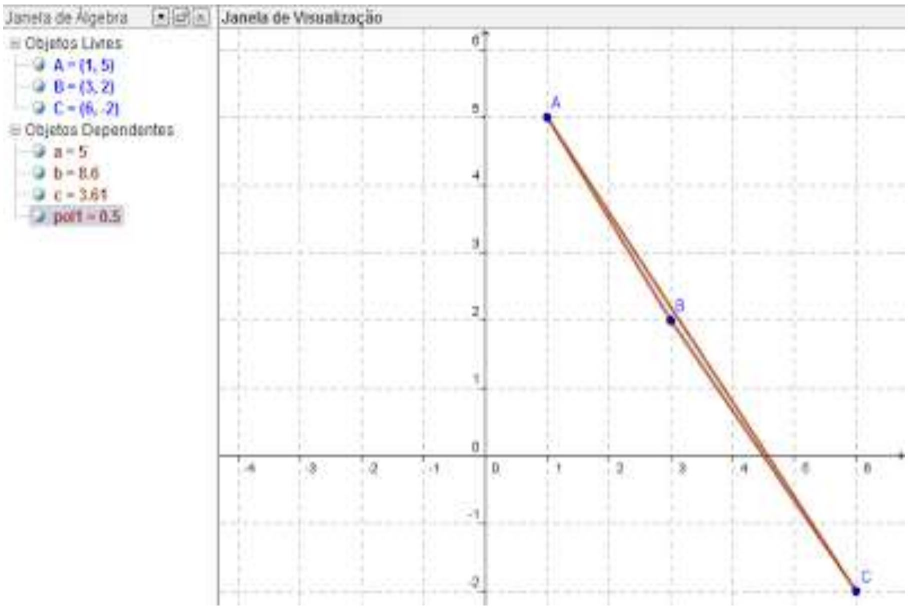
Fonte: Foto encontrada no *site* Geogebristas

Na janela de Álgebra ou na Janela de Visualização (figura 35), clique no ponto A, B, C e A novamente.

Verifique que, na janela de Álgebra, aparece uma área diferente de zero, o que mostra que os pontos não estão alinhados (pol1=0.5).

[20] Disponível em <http://geogebristas.blogspot.com.br/p/lista-de-exercicios-sobre-geometria.html> Acesso em 14 de Jan. 2016.

Figura 35 [21]– Pontos não alinhados

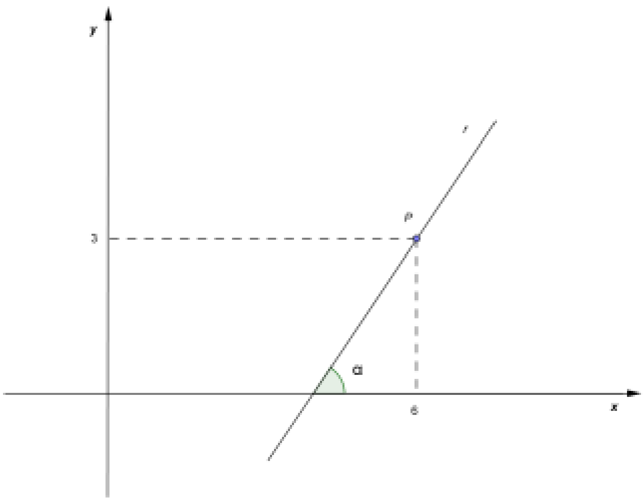


Fonte: Foto encontrada no *site* Geogebristas

5.5 EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DA RETA

A reta r representada na figura 36 passa pelo ponto $P(6,3)$, e seu coeficiente angular é $mr = 2.$

Figura 36 – Representação da reta r no plano cartesiano usando o *software* GeoGebra



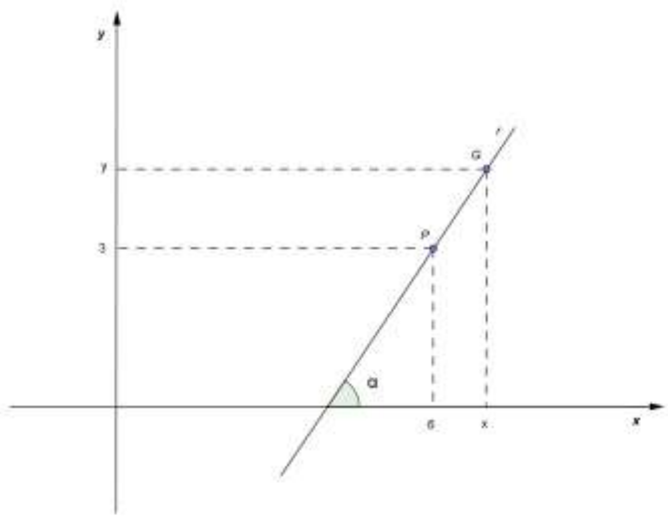
Fonte: Arquivo dos autores

Com base nesses dados, podemos obter uma equação que represente todos os pontos (x, y) que pertencem à reta r. Para obtê-la, vamos considerar um ponto genérico $G(x, y)$,

[21] Disponível em <http://geogebristas.blogspot.com.br/p/lista-de-exercicios-sobre-geometria.html> Acesso em 14 de Jan. 2016.

distinto de P. O ponto G (figura 37), pertence à reta r se, e somente se, o coeficiente angular calculado pelos pontos P e G é igual ao coeficiente angular de r, ou seja:

Figura 37 – Obtendo uma equação da reta no plano cartesiano usando o *software* GeoGebra



Fonte: Arquivo dos autores

$m\,PG = m\_r \Rightarrow (y-3)/(x-6) = 2$

$\Rightarrow y - 3 = 2(x-6) \Rightarrow y - 3 = 2x - 12$

$\Rightarrow y = 2x - 9$

Note que o ponto $P(6,3)$ também satisfaz a equação $y = 2x - 9$, pois, substituindo x por 6 e y por 3, essa igualdade é satisfeita. Observe:

$$3 = 2\,.\,6 - 9 \rightarrow 3 = 3$$

Assim, concluímos que a equação $y = 2x - 9$ representa todos os pontos (x, y) do plano cartesiano que pertencem à reta r, por isso ela é chamada de **equação da reta r**.

Podemos generalizar esse raciocínio pelo teorema a seguir.

Se r é a reta não vertical que passa pelo ponto $P(x_O, y_O)$ e tem coeficiente angular m, então uma equação de r é:

$$y - y_O = m(x - x_O)$$

Atividades:

1. Obtenha uma equação da reta que passa pelo ponto P e tem coeficiente angular m em cada um dos casos:

   a) $P(6,3)$ e $m = 2$.

Solução:

Temos um ponto $P(6, 3)$, e, $m_r = 2$.

Temos então um ponto com as coordenadas definidas, e, o coeficiente angular da reta r. Tomamos um ponto genérico $Q(y_q, x_q)$, pertencente a reta r. Aplicamos a fórmula para o cálculo do coeficiente angular de uma reta, dados dois pontos dessa reta. Temos:

$$m_r = \frac{(y_q - y_p)}{(x_q - x_p)} \Rightarrow 2 = \frac{(y-3)}{(x-6)} \Rightarrow 2x - 12 = y - 3 \Rightarrow y = 2x - 9$$

b) $P(4, -5)$ e $m = 1$.

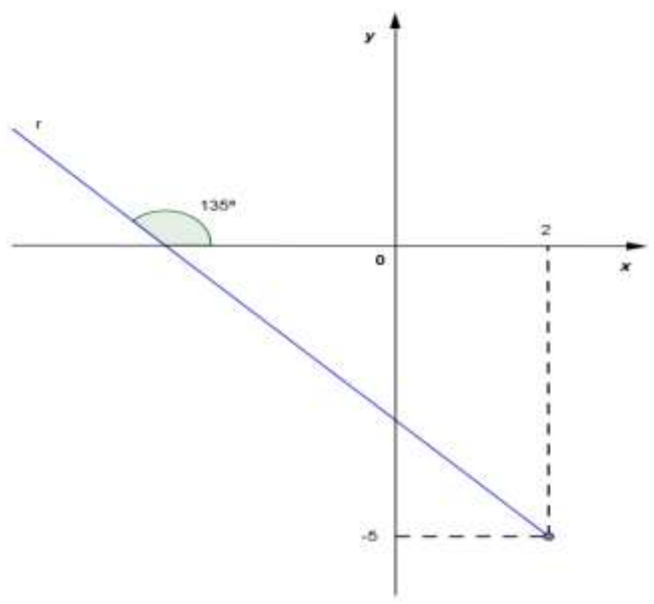
Solução: Temos um ponto $P(4, -5)$, e, $m_r = 1$

Temos então um ponto com as coordenadas definidas, e, o coeficiente angular da reta r. Tomamos um ponto genérico $Q(y_q, x_q)$, pertencente a reta r. Aplicamos a fórmula para o cálculo do coeficiente angular de uma reta, dados dois pontos dessa reta. Temos:

$$m_r = \frac{(y_q - y_p)}{(x_q - x_p)} \Rightarrow 1 = \frac{(y-(-5))}{(x-4)} \Rightarrow x - 4 = y + 5 \Rightarrow y = x - 9$$

1. Obtenha uma equação para cada uma das retas representadas na figura 38.

Figura 38 - Representação da reta r no plano cartesiano usando o *software* GeoGebra



Fonte: Arquivo dos autores

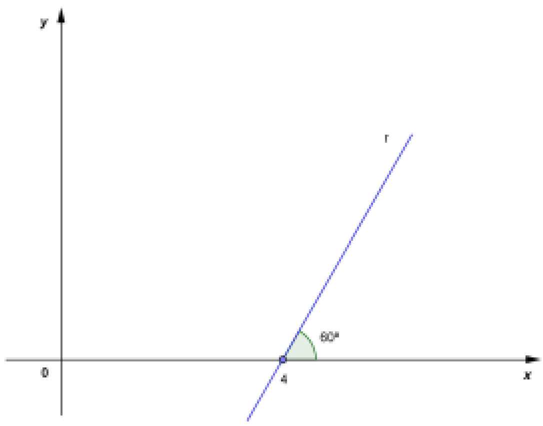
Solução: Temos um ponto $P(2,-5)$, e a inclinação da reta r é 135°.

O coeficiente angular m da reta r é a tangente do ângulo que a reta forma com o eixo x. Então, $m_r = tg\, 135° = -1$

Temos então um ponto com as coordenadas definidas, e, o coeficiente angular da reta r. Tomamos um ponto genérico $Q(y_q, x_q)$, pertencente à reta r (figura 39). Aplicamos a fórmula para o cálculo do coeficiente angular de uma reta, dados dois pontos dessa reta. Temos:

$$m_r = \frac{(y_q - y_p)}{(x_q - x_p)} \Rightarrow -1 = \frac{(y-(-5))}{(x-2)} \Rightarrow -x + 2 = y + 5 \Rightarrow y = -x - 3$$

Figura 39 – Representação da reta r no plano cartesiano usando o *software* GeoGebra



Fonte: Arquivo dos autores

Solução: Temos um ponto $P(4,0)$, e a inclinação da reta r é 60°.

O coeficiente angular m da reta r é a tangente do ângulo que a reta forma com o eixo x.

Então, $m_r = tg\, 60° = \sqrt{3}$

Temos então um ponto com as coordenadas definidas, e, o coeficiente angular da reta r. Tomamos um ponto genérico $Q(y_q, x_q)$, pertencente à reta r. Aplicamos a fórmula para o cálculo do coeficiente angular de uma reta, dados dois pontos dessa reta. Temos:

$$m_r = \frac{(y_q - y_p)}{(x_q - x_p)} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{(y-0)}{(x-4)} \Rightarrow \sqrt{3}x - 4\sqrt{3} = y$$

5.6 EQUAÇÃO GERAL DA RETA

Toda reta do plano cartesiano xOy é gráfico de uma equação da forma $ax + by + c = 0$, em que x e y são variáveis e a, b e c são constantes reais com a e b não simultaneamente nulas. Reciprocamente, toda equação dessa forma representa uma reta do plano cartesiano. Essa equação é chamada de **equação geral** da reta.

Note, portanto, que a equação geral da reta é uma equação do 1° grau com duas variáveis em que um dos membros da igualdade é zero.

5.7 EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA

Vimos que uma equação da reta r que passa pelo ponto $P(x_O, y_O)$ e tem coeficiente angular igual a m é: $y - y_O = m(x - x_O)$. Isolando a variável y nessa equação, obtemos:

$y = mx + y_O - mx_O$

Observando que a expressão y_O - mx_O é uma constante e indicando a por q, podemos representar:

$y = mx + q$

Essa equação é chamada de **equação reduzida** da reta r.

O coeficiente m de x na equação reduzida é o coeficiente angular da reta. Ao termo q, independente de x e y, que é a ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo das ordenadas, damos o nome de coeficiente linear da reta.

Atividade:

1. Determine a equação reduzida da reta (s) $2x + y = 5$.

Solução:

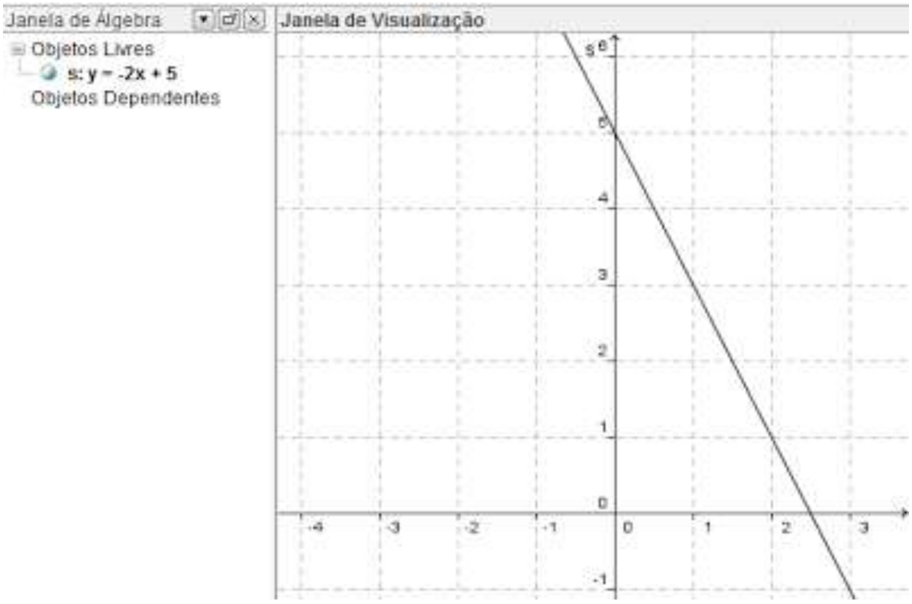
Na caixa de entrada, digite a equação da reta s.

Na janela de álgebra, clique com o botão direito em cima da equação da reta s e escolha "Equação $y = ax + b$".

Verifique que aparecerá na Janela de Álgebra (figura 40), a equação reduzida:

$s: y = -2x + 5.$

Figura 40 [22]– Obtendo a equação reduzida de uma reta no plano cartesiano usando o *software* GeoGebra



Fonte: Figura encontrada no *site* Geogebristas

5.8 FUNÇÃO AFIM E A EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA

A função afim (ou função de 1º grau): f $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada função afim quando sua lei é do tipo f(x) = ax + b, com a $\in \mathbb{R}^*$ e b $\in \mathbb{R}$.

Vamos comparar a função afim e a equação da reta:

Equação reduzida da reta: y = mx + n

m: declividade.

n: ordenada do ponto de intersecção com o eixo y.

Função afim: f(x) = ax + b

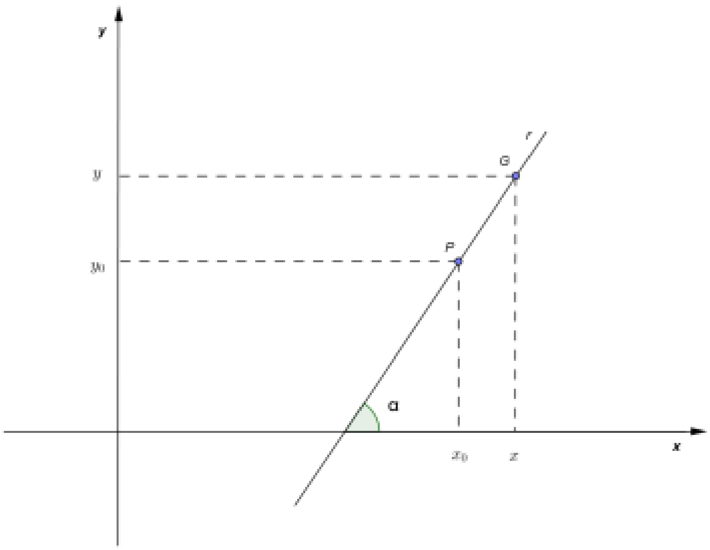
a: condição de crescimento.

b: f(0)

Podemos concluir que a equação reduzida de uma reta y = mx + n representa outra maneira de expressar a lei de uma função afim y = ax + b.

22 Disponível em <http://geogebristas.blogspot.com.br/p/lista-de-exercicios-sobre-geometria.html> Acesso em 14 de Jan. 2016.

Figura 41 - Representação da reta r no plano cartesiano usando o *software* GeoGebra

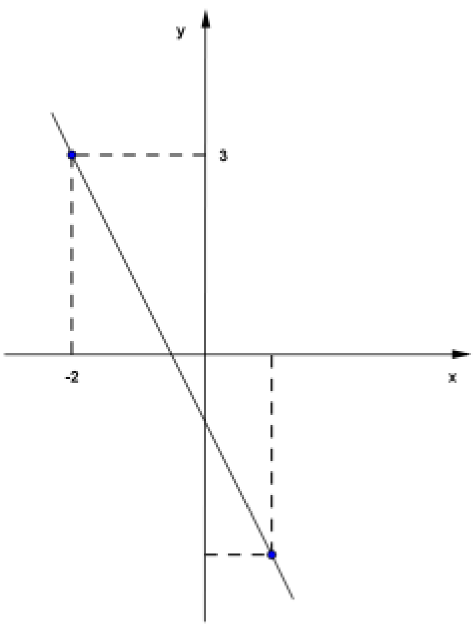


Fonte: Arquivo dos autores

1. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função afim tal que $f(-2) = 3$ e $f(1) = -3$.
   a) Represente graficamente a função.
   b) Determine o coeficiente angular e o coeficiente linear da reta obtida.

Solução: Letra a.

Figura 42 – Representação gráfica da função no plano cartesiano usando o *Software* GeoGebra



Fonte: Arquivo dos autores

Solução: Letra b.

a) $f(-2) = 3 \Rightarrow x = -2, y = 3$

$f(1) = -3 \Rightarrow x = 1, y = -3$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-(-3)}{-2-1} = \frac{6}{-3} = -2$$

$y = -2x + n$

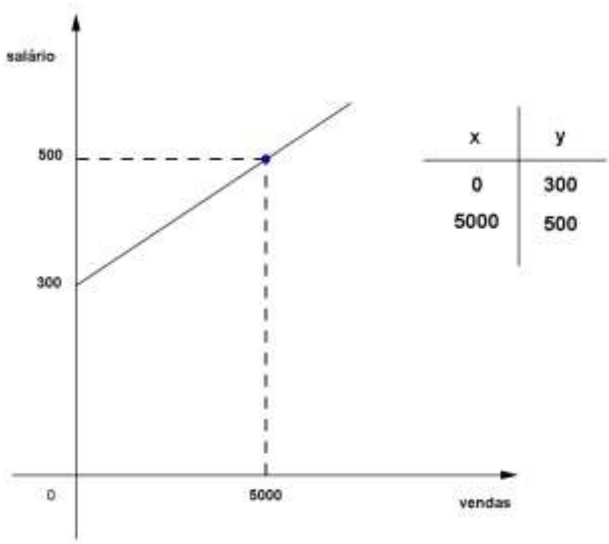
$3 = -2.(-2) + n \Rightarrow n = -1$

3 Um vendedor possui salário fixo de R$300,00 reais, mais comissão de 4% sobre o total de vendas do mês. Represente graficamente o salário (*y*) do vendedor em função do total de vendas (*x*) realizadas no mês. Qual é a equação geral da reta obtida?

Solução:

$y = 0{,}04 . x + 300 \Leftrightarrow 0{,}04x - y + 300 = 0;\ x \geq 0$

Figura 43 - Representação gráfica da função no plano cartesiano usando o *software* GeoGebra



Fonte: Arquivo dos autores

4 A equação reduzida de uma reta é y = -3x + 7. Essa reta é a representação gráfica de uma função afim. Qual é o valor de f(2) e de f(-1)?

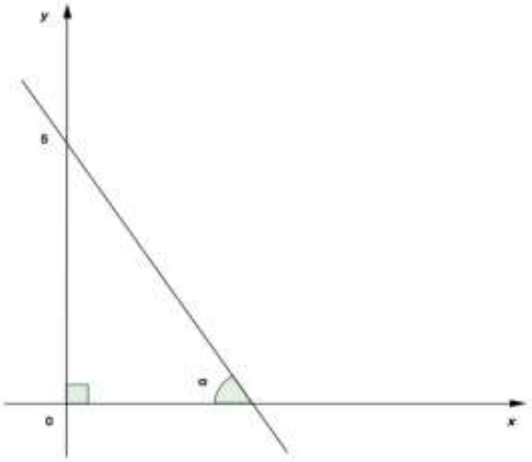
Solução

f(2) é obtido para $x = 2 \Rightarrow y = -3.2 + 7 = 1$

f(-1) é obtido para $x = -1 \Rightarrow y = -3.(-1) + 7 = 10$

5 A figura representa o gráfico de uma função afim f.

Figura 44 – Representação gráfica da função afim no plano cartesiano usando o *software* GeoGebra



Fonte: Arquivo dos autores

Sabendo que tg α = 3, determine a lei que define f.

Solução:

A equação reduzida da reta dada é:

$y = mx + n$, com: $n = 5$ e $m = tg\,(180° - \alpha) = - tg\,\alpha = -3$

$y = - 3x + 5$; $f(x) = - 3x + 5$

6 Uma locadora de automóveis oferece a seus clientes dois planos: o plano alfa não cobra diária, e o valor do quilômetro rodado é R$ 1,80; O plano beta cobra diária de *d* reais e um adicional de R$ 0,60 por quilômetro rodado.

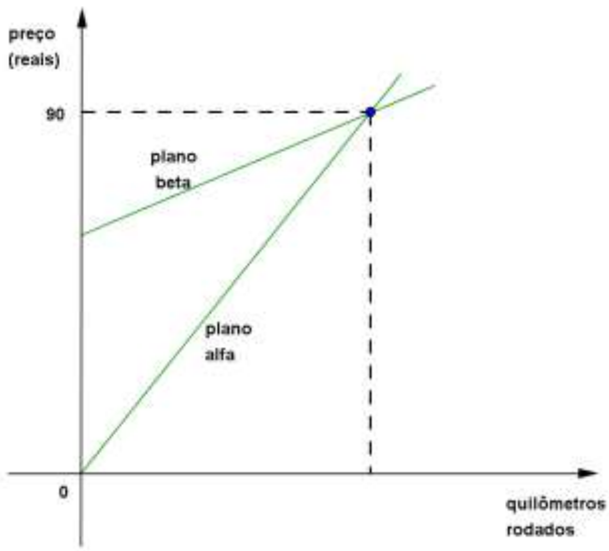
Figura 45[23] – Carros no estacionamento

Fonte: Postado por dreamstime.com

[23] Disponível em: <https://www.google.com.br/search?q=dreamstime+imagens+de+carros&biw=1280&bih=657&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwi3yeCy6qzKAhWIkpAKHWiBDIQ_AUIBigB#tbm=isch&q=+imagens+de+carros+estacionamento&imgrc=WoQPcX3tRJdtjM%3A> Acesso em: 15 de Jan. 2016.

No gráfico seguinte, é possível comparar o preço dos dois planos:

Figura 46 - Representação dos planos beta e alfa no plano cartesiano usando o software GeoGebra



Fonte: Arquivo dos autores

Determine:

a) O valor de d.
b) A abscissa do ponto de interseção das retas.
c) As equações gerais das duas retas representadas.

Solução:

Plano alfa: y = 1,80.x (1)

Plano beta: y = 0,60.x + d (2)

y: preço

x: número de quilômetros rodados

Em (1):

a) y = 90 ⇒ 90 = 1,80.x ⇒ x = 50
b) x = 50
c) Em (1): 1,80x – y =0

Em (2): 0,60x – y + 60 = 0

7 EQUAÇÕES: HISTÓRIA, CONTEXTUALIZAÇÃO E APLICAÇÃO.

"Assim como o Sol empalidece as estrelas com o seu brilho, um homem inteligente eclipsa a glória de outro homem nos concursos populares, resolvendo os problemas que este lhe propõe". François Viète

Esse texto da Índia antiga fala de um passatempo muito popular dos matemáticos hindus da época: a solução de quebra cabeças em competições públicas, em que o competidor propunha problemas para outro resolver. Sem nenhum sinal, sem nenhuma variável, somente alguns poucos sábios eram capazes de resolver problemas, usando muitos artifícios e trabalhos de construções geométricas.

Os egípcios não utilizavam notação algébrica, os métodos de solução de uma equação eram complexos e cansativos. Os gregos resolviam equações através de Geometria. Foram os árabes que, cultivando a Matemática dos gregos, conseguiram progresso na resolução de equações. Chamavam o valor desconhecido de "coisa", pronunciada como xay, daí surge o x como tradução simplificada de palavra "coisa".

Equações do primeiro grau do ponto de vista elementar, equações são problemas que determina certos valores desconhecidos, sabendo que quando esses valores são manipulados algebricamente, de certa maneira, são obtidos certos valores dados. As primeiras equações na forma escrita surgiram no antigo Egito 3000 anos a.C.

Há aproximadamente 3600 anos, o faraó tinha um súdito, cujo nome chegou até os nossos dias: Aahmesu, cujo significado é "filho da lua", era uma pessoa muito simples provavelmente um escriba. Atualmente ele é conhecido como Ahmes autor do Papiro Ahmes, mais famoso como Papiro de Rhind.

O Papiro de Rhind foi encontrado em meados do século passado, presumivelmente nas proximidades do templo de Ramsés II, na antiga cidade de Tebas, no Egito. Em 1858 foi comprado, no local, pelo antiquário escocês A.H. Rhind. O papiro é um rolo com cerca de 30 cm de altura e 5 m de comprimento e encontra-se hoje, salvo alguns fragmentos, no Museu Britânico. O Papiro de Rhind é um antigo manual de Matemática, contendo 80 problemas de Álgebra, cada um com a sua solução. Nesse papiro, encontramos as primeiras equações do primeiro grau, na forma de problemas "aha". Aha significava quantidade. Tais problemas referem- se à determinação de quantidades desconhecidas.

Texto publicado por Inês Chiarelli Dias

MANUAL DO PROFESSOR

EIXO PRINCIPAL

GEOMETRIA ANALÍTICA

Esta cartilha destina-se exclusivamente a trabalhar a Geometria Analítica no Ensino Médio, inserindo uma proposta de trabalho numa perspectiva investigatória e que contribua com o processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo específico da Matemática.

O conteúdo de Geometria Analítica é um tópico significativo na matemática por abordar conceitos algébricos e geométricos. No Ensino Médio, comumente, a Geometria Analítica é trabalhada somente no 3º ano, posição esta estratégica no currículo de Matemática, pois é a etapa de encerramento da Educação Básica, e, uma etapa preparatória para Educação Superior.

A Geometria Analítica é parte integrante dos conteúdos a serem trabalhados na Educação Básica. Além disso, os conceitos são aprofundados nos componentes curriculares dos cursos de graduação das Ciências Exatas tais como Engenharia, Ciências da Computação, Arquitetura, Matemática, Física, etc. Seu estudo é relevante, pois é uma ferramenta importante para o Cálculo Diferencial e Integral e é uma das principais referências em um primeiro curso de Álgebra Linear. (SANTOS, 2013, p.1-2).

ESTRUTURA DA CARTILHA

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Ao fim do estudo do Ponto e da Reta, são apresentados textos referentes à História da Matemática, os quais têm por objetivo colocar o leitor em contato com a história da criação do conhecimento em Matemática.

Saito e Dias (2013) salientam que a articulação entre a história e ensino, não é uma tarefa simples, pois não visa apenas uma compreensão mais contextualizada dos objetos matemáticos, mas também uma metodologia de abordagem que viabilize uma proposta didático-pedagógica. Os autores argumentam que a contextualização histórica não implica apenas na descrição dos conteúdos matemáticos, mas também, relacioná-los à própria natureza da Matemática no passado. Por meio da análise histórica dos conceitos e das problemáticas que conduziram ao surgimento de um conteúdo matemático num determinado momento histórico, é possível compreender como o conhecimento matemático se desenvolveu e se institucionalizou em diferentes épocas (Bromberg & Saito, 2010). (SANTOS, 2013, p. 2-3).

O USO DAS TICs

O avanço tecnológico é constante na sociedade, o que, consequentemente abrange a área da educação. Surge então a necessidade de práticas educacionais que trabalhe esses recursos tecnológicos. Uma ferramenta a ser explorada é o computador. Iran Abreu Mendes em sua obra (Matemática e Investigação em sala de aula: Tecendo redes cognitivas na aprendizagem (2009)), apresenta algumas considerações acerca do uso do computador como ferramenta de apoio didático no ensino de Matemática.

A Geometria Analítica é um tópico na Matemática que exige capacidade dos alunos em identificar figuras geométricas num plano utilizando coordenadas. O uso de *softwares* representativos no ensino de Geometria Analítica é uma proposta que vêm sendo apresentada em vários projetos e artigos, abordando o uso das TICs (Tecnologias da Informação e Comunicação) no ensino de Matemática. Uma proposta didática que aborde o uso de algum *software* para trabalhar a Geometria Analítica, sem dúvida contribuiria para o Ensino e Aprendizagem deste tópico em específico, além de desenvolver as habilidades dos alunos com esses recursos.

GeoGebra é um *software* de geometria dinâmica, de código aberto, livre, desenvolvido pelo austríaco Ph. D. Markus Hohenwarter, da Universidade de *Salzburg*, para ser utilizado em sala de aula. A utilização de novas tecnologias na educação possibilita a reestruturação do ensino tradicional de Geometria, através da inserção de *softwares* de geometria dinâmica como o GeoGebra, desenvolvendo a autonomia do aluno.

INTEGRAÇÃO DE CONTEÚDOS

Procuramos estabelecer no texto conexões entre o assunto em desenvolvimento e outros tópicos de Matemática, procurando evitar a fragmentação do conteúdo. Procuramos destacar alguns conceitos de Geometria Plana, e como esses conceitos podem ser vistos no estudo da Geometria Analítica. No estudo das formas de Equação da Reta, ao apresentarmos a Equação Reduzida da Reta, procuramos destacar as relações existentes com o estudo de Função Afim, e apresentar a definição da equação através do uso de Determinantes.

Além disso, muitos exercícios buscam a integração de conteúdos diversos de Matemática, visando também à retomada de conceitos importantes ou à visualização sob outro ponto de vista.

CONTEXTUALIZAÇÃO E APLICAÇÃO A OUTRAS ÁREAS DO CONHECIMENTO

No início do estudo dos tópicos: (Plano Cartesiano, Distância entre dois pontos, e, Ponto Médio de um Segmento de Reta) são apresentados problemas ou situações contextualizadas com o dia-a-dia, de forma a motivar o leitor na construção dos conceitos apresentados nesse estudo.

São apresentados textos que abordam os conceitos de: coordenadas geográficas, (conceito de Latitude e Longitude, Unidades de Medida de Ângulos, Sistema de Coordenadas e Localização de Pontos); o Cálculo de Distância entre Dois Pontos (conceitos matemáticos trabalhados em Navegação Marítima, Trigonometria no Triângulo Retângulo, aplicações à Aeronáutica etc.).

DIRETRIZES CURRICULARES NACIONAIS PARA O ENSINO MÉDIO

Desde a Constituição de 1988, o ensino escolar passou a ser obrigatório e gratuito para pessoas entre 04 e 17 anos de idade. Antes, o antigo Ensino Médio era conhecido como Ensino Secundário. Na década de 30, o ensino era dividido em dois modelos: Ginásio e Colegial. Este com duração de três anos e aquele com duração quatro anos. O regime era de seletividade, realizado por exame de admissão. Tanto para a elite, quanto para a classe menos favorecida. Esta estudava o Curso Médio Técnico, e cedia funcionários para as fábricas recém-instaladas no país. Com o passar dos anos, veio a universalização do Ensino Médio, tanto quem faria faculdade, quanto quem não faria estudava os mesmos conteúdos. (MOEHLECKE, 2012).

Neste ínterim, a educação passou por várias mudanças, e muitos foram os programas de governo criados para dar sustentação às demandas do Ensino Básico. Estes programas serviram e ainda servem, para diagnosticar as defasagens do ensino, melhorar os mecanismos de atuação e avaliar os resultados obtidos com as aplicações desses mecanismos.

Eis que surge uma nova perspectiva para a redefinição e o fortalecimento do Ensino Médio, elaborada pelo PNE (Programa Nacional de Educação) novas políticas para melhorias no ensino, entre elas, estão o FUNDEB (Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação) incorporados ao PDE (Plano de Desenvolvimento da Educação), ambos criados em 2006. Abrangendo não somente o Ensino Médio, mas, também o Ensino Superior. (MOEHLECKE, 2012).

O FUNDEB visa financiar todas as etapas da Educação Básica, inclusive o Ensino Médio e profissionalizante de acordo com o número de estudantes matriculados nos respectivos modelos de ensino, abrange ainda o Programa Brasil Profissionalizado, que busca ofertar ensino profissional integrado ao Ensino Médio e formar profissionais capacitados para o mercado de trabalho. Essa política educacional visa melhorar as condições financeiras e de infraestrutura do Ensino Médio, compreende-se a valorização, a reflexão e a difusão de experiências que estejam direcionadas a construir, para esse nível de ensino, uma nova concepção e uma nova organização curricular, mais atenta às mudanças em nossa sociedade e às demandas de seu público diversificado. (MOEHLECKE, 2012).

Em 2009, o MEC criou o Programa do Ensino Médio Inovador, de apoio técnico e financeiro aos estados. Tentando superar a dualidade entre Ensino Médio de caráter propedêutico e Ensino Médio de caráter de preparo para o trabalho. Definindo lhe uma nova identidade integrada, na qual se estimular a reorganização curricular da escola e superar fragmentação do conhecimento e desenvolver uma articulação interdisciplinar, por áreas de conhecimento abrangendo os quatro eixos constitutivos do ensino: Trabalho, Ciência, Tecnologia e Cultura. Assim, propõe-se um vasto currículo, organizado em torno da autonomia e protagonismo social dos jovens, elaborado com base nos espaços intra e extraescolar e nas situações de tempos diversos. (MOEHLECKE, 2012).

Sabrina Moehlecke diz:

> “O Programa quer promover o desenvolvimento de inovações pedagógicas das escolas públicas, de modo a fomentar mudanças necessárias na estrutura curricular dessa etapa educacional, bem como o reconhecimento da singularidade dos sujeitos a que atende. Desse modo, foram definidas algumas condições iniciais básicas para orientar os projetos das escolas”. (2012, p. 45).

Ainda segundo Moehlecke o Programa Ensino Médio Inovador (2009) busca responder às mudanças ocorridas nas últimas décadas no Ensino Médio e propõe um currículo adequado às múltiplas necessidades sociais e culturais da população brasileira.

Os principais objetivos do programa são:

a) Carga horária mínima de três mil horas;

b) Centralidade na leitura como elemento basilar de todas as disciplinas, privilegiando-se, nessa prática, a utilização e a elaboração de materiais motivadores, assim como a orientação docente;

c) Estímulo às atividades teórico-práticas desdobradas em laboratórios de Ciências, Matemática e outros que apoiem processos de aprendizagem nas diferentes áreas do conhecimento;

d) Fomento de atividades de artes para promover a ampliação do universo cultural do aluno;

e) Mínimo de 20% da carga horária total do curso em atividades optativas e disciplinas eletivas a serem escolhidas pelos estudantes;

f) Atividade docente com dedicação exclusiva à escola;

g) Projeto Político Pedagógico implementado com a participação efetiva da comunidade escolar e organização curricular articulada com os exames do Sistema Nacional de Avaliação do Ensino Médio.

O MEC registra ainda as alterações feitas no ENEM, portaria n. 109/2009, artigo segundo que teve seus objetivos ampliados. Quais sejam: ensino suficiente para que cada estudante seja capaz de avaliar suas escolha quanto à sequência dos estudos ou iniciar no mercado de trabalho. Estruturar uma avaliação de desempenho do Ensino Básico que sirva de referência para exames de seleção em diferentes setores do trabalho ou acesso a cursos superiores. Possibilitar o acesso a programas governamentais. Promover a certificação de jovens e adultos concluintes do Ensino Médio. Promover avaliação de desempenho acadêmicos das escolas. Promover a avaliação acadêmica dos estudantes ingressantes no Ensino Superior.

Moehlecke (2012) diz que o ENEM assume importante papel na universalização do Ensino Médio:

> “O ENEM assume desse modo, as funções de: a) avaliação sistêmica, ao subsidiar a formulação de políticas públicas; b) avaliação certificatória, ao aferir conhecimentos para aqueles que estavam fora da escola; c) avaliação classificatória, em relação ao acesso ao ensino superior, ao difundir-se como mecanismo de seleção entre as instituições de ensino superior, articulado agora também ao Sistema Unificado de Seleção (SISU). Diante dessa reconfiguração do exame e da expansão do número de

> inscritos, cabe observar o impacto dessa política da definição do currículo efetivamente em vigência nas escolas de ensino médio no país". (2012, p.46).

UMA CONCEPÇÃO PARA O ENSINO MÉDIO

Atribuímos à Educação Integral um pensamento filosófico que expressa uma concepção de formação humana, baseado num processo formativo para a educação. O primeiro sentido da integração educacional não aponta se a formação é geral ou profissionalizante. Este sentido pode orientar tanto a educação básica quanto a Educação Superior. A integração, no primeiro sentido, possibilita formação social e integral das dimensões fundamentais da vida que estruturam a prática social: o trabalho, a ciência e a cultura.

Acerca dessa concepção para educação (RAMOS 2008) diz:

> "O trabalho compreendido como realização humana inerente ao ser (sentido ontológico) e como prática econômica (sentido histórico associado ao respectivo modo de produção); a ciência compreendida como os conhecimentos produzidos pela humanidade que possibilita o contraditório avanço produtivo; e a cultura, que corresponde aos valores éticos e estéticos que orientam as normas de conduta de uma sociedade". (2008, p. 4).

O trabalho interage com a necessidade do homem se satisfazer e produzir frutos para a sociedade. Assim, trabalho não é emprego, nem ação econômica específica. Trabalho é produção, criação, realização humana. Isto é, trabalho nessa perspectiva, compreende a história da humanidade, as suas lutas e conquistas mediadas pelo conhecimento humano. (RAMOS 2008).

Para (RAMOS 2008) o trabalho adquire também um sentido econômico, como forma histórica das relações sociais sob um modo de produção específico.

> "Nas sociedades capitalistas a forma hegemônica do trabalho se dá pela venda e compra da força de trabalho, regulada contratualmente na forma de emprego. Esse sentido estrutura as práticas de profissionalização, de formação profissional como preparação para o exercício do trabalho. Mas esta é somente uma dimensão do trabalho. Precisamos pensar no trabalho como realização humana". (RAMOS, 2008, p. 4).

A ciência é o conhecimento produzido pela humanidade em processos mediados pelo trabalho e pela ação do homem, estes são legítimos conhecimentos sociais, válidos porque explicam a realidade e possibilitam uma intervenção sobre ela. Basta dizer que: trabalho e ciência, juntos formam uma unidade, portanto, o conhecimento está embasado na interação do homem com a realidade e com a natureza. A ação humana produz conhecimento. A ciência é imprescindível para a modernidade, porém, o ser humano produz conhecimentos quando enfrenta a realidade e seus problemas, buscando superar necessidades. (RAMOS 2008).

Para (RAMOS 2008) a cultura, enquanto ciência e valores integram os processos formativos de um grupo social. Grupos sociais compartilham valores éticos, morais, simbólicos que organizam a sua ação e a produção estéticos, artísticos, etc.

> "Compreender a relação indissociável entre trabalho, ciência e cultura significa compreender o trabalho como princípio educativo, o que não se confunde com o "aprender fazendo", nem é sinônimo de formar para o exercício do trabalho. Considerar o trabalho como princípio educativo equivale dizer que o ser humano é produtor de sua realidade e, por isto, se apropria dela e pode transformá-la. Equivale dizer, ainda, que nós somos sujeitos de nossa história e de nossa realidade. Em síntese, o trabalho é a primeira mediação entre o homem e a realidade material e social. O trabalho também se constitui como prática econômica, obviamente porque nós garantimos nossa existência produzindo riquezas e satisfazendo necessidades". (RAMOS, 2008, p.4).

Numa sociedade moderna, a profissionalização é fundamentada pela relação econômica, sob a perspectiva da integração entre trabalho, ciência e cultura, e não à simples formação para o mercado de trabalho. Ao contrário, ela incorpora valores éticos e políticos associados a conteúdos históricos e científicos próprios da relação humana. Portanto, formar profissionalmente é proporcionar uma compreensão do pensamento moderno, com as conquistas e os revezes, capacitando as pessoas para o exercício próprio e crítico das profissões, quaisquer que sejam elas. (RAMOS 2008).

AVALIAÇÃO

Este material sugere a aplicação dos conteúdos usando o *software* matemático livre GeoGebra, este, foi planejado por estar presente nos computadores enviados para a escola que servirá como campo de pesquisa para os autores desta cartilha pedagógica.

Sugerimos neste material que os professores que vierem a fazer dele procurem trabalhar usando interdisciplinaridade entre os conteúdos matemáticos, físicos, geográficos e geométricos.

A cada sugestão de abordagem, deixamos um passo a passo para os professores utilizarem o GeoGebra para que fiquem à vontade para trabalhar com esta ferramenta que acreditamos ser muito útil para os estudantes para a fixação dos conceitos e melhor aproveitamento nas construções de gráficos e funções.

Não descartamos as construções feitas à mão, elas são importantíssimas e devem ser trabalhadas, porém, tais construções, são demasiadamente demoradas e podem ser confusas se forem estudados vários conceitos numa mesma figura ou num mesmo eixo de coordenadas, porquanto, o uso desta tecnologia facilita o trabalho de professores e estudantes.

SUGESTÕES DE ABORDAGEM, AVALIAÇÃO E TÓPICOS PRINCIPAIS

Ao estudarmos a Geometria Analítica, nosso objetivo maior é possibilitar situações em que o aluno possa desenvolver intuitivamente a relação existente entre conceitos algébricos e geométricos. Para tal objetivo, é necessário que o professor atue como coordenador desse processo, propondo atividades que sejam coerentes com sua proposta.

Nesse processo, é fundamental que se criem situações em que os alunos percebam as vantagens do uso de um sistema de coordenadas cartesianas para localizar, por exemplo, algum estabelecimento ou alguma rua em um bairro, cidades em um mapa etc. Em vários pontos da série de atividades são propostos problemas dessa natureza, inclusive fazendo uma breve abordagem acerca da localização de pontos no globo terrestre através de Coordenadas Geográficas.

Para o estudo da Geometria Analítica, é necessário que os estudantes tenham uma bagagem sólida de conhecimentos geométricos adquiridos ao longo de suas vidas acadêmicas.

A princípio, o conteúdo está inserido numa proposta de introdução à Geometria Analítica, focando nos conceitos básicos, através de atividades que trabalham localização de pontos no Plano Cartesiano, noção intuitiva em relação a menor Distância entre dois Pontos, e, Coordenadas de Ponto Médio de um Segmento de Reta. Alertamos para a necessidade da construção de "fórmulas" com os alunos, trabalhando na perspectiva da resolução de problemas.

Optamos por dar autonomia ao professor para decidir o momento de trabalhar a utilização de algumas fórmulas, e para apresentar alguns tópicos e propriedades geométricas que podem ser trabalhadas nesses tópicos iniciais, como por exemplo: bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares no Plano Cartesiano, Mediana e Baricentro, e, o método e definição da Equação da Reta por Determinante. Quanto ao número de atividades propostas, optamos por trabalhar com um número relativamente pequeno, ficando a critério de o professor decidir a quantidade de exercícios a serem trabalhados.

Nas atividades propostas, geralmente é utilizado o *software* GeoGebra como ferramenta de representação de gráficos, e as soluções exigem que seja trabalhado os métodos destacados com o uso do *software*, e também os métodos comumente utilizados pelo professor. As soluções das atividades propostas vêm incluídas na sequência das questões.

No estudo da Reta, a ênfase das atividades está direcionada a introdução do conceito de Coeficiente Angular e o método utilizado para calculá-lo. Pretendemos trabalhar a Condição de Alinhamento de Três Pontos através do cálculo do Coeficiente Angular, e, posteriormente, definir a Equação Fundamental da Reta. Após a definição da Equação Geral da Reta, o foco está presente no estudo da equação reduzida e relacioná-la com Função Afim, promovendo conexões entre diferentes campos da Matemática. Nossa proposta se encerra no estudo da forma reduzida da Equação da Reta, tendo em vista que queremos trabalhar os conceitos básicos.

Anexo a este material segue um manual de instrução para o uso do *software* GeoGebra. Este *software* de desenho geométrico pode ser de fundamental importância para representação e visualização de figuras geométricas, contribuindo diretamente para o desenvolvimento das atividades. Portanto, sugerimos que o professor trabalhe todas as representações de figuras utilizando esse *software* e que os alunos possam também trabalhar essas construções. É interessante que o professor dedique algumas de suas aulas apenas na apresentação e desenvolvimento de algumas atividades de reconhecimento do *software*, para que o *software* não se torne um fator desestimulante para alunos que não dominam o uso dessa ferramenta.

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto**, Livro didático, Matemática: contexto e aplicações.** Ática, 2009.

FALCONI, Carlos Eduardo**, Calculando Distâncias e direções Utilizando Coordenadas Geográficas. Disponível em: <** http://www.pilotopolicial.com.br/calculando-distancias-e-direcoes-utilizando-coordenadas-geograficas/.> Acesso em: 27 nov. 2015.

GEOGEBRA**, Informática Educativa – Geometria Analítica com o GeoGebra**. Disponível em: <http://www.geogebra.org/student/b150055#material/152494>Acesso em: 27 nov. 2015.

GEOGEBRA, **Lista de Exercícios sobre Geometria Analítica e Soluções**. Disponível em<http://geogebristas.blogspot.com.br/p/lista-de-exercicios-sobre-geometria.html.> Acesso em: 27 nov. 2015.

GRUPO DITAFAFRAN, **Educação Matemática e Tecnologia**. Disponível em:<http://mandrake.mat.ufrgs.br/~mat01074/20072/grupos/ditafafran/geogebra/geo.html.> Acessado em 27 de novembro de 2015.

IEZZI, Gelson. **Livro didático, Matemática: ciência e aplicações.** Editora Moderna 2ª edição, 2010.

MOEHLECKE, Sabrina. Revista Brasileira de Educação v. 17 n. 49 jan.-abr. 2012. **O Ensino Médio e as Novas Diretrizes Curriculares Nacionais: entre recorrências e novas inquietações**; disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbedu/v17n49/a02v17n49.pdf>. Acesso em: 27 nov. 2015.

PAIVA, Manoel. **Livro didático, Matemática Paiva.** 2ª ed. São Paulo, 2013.

RAMOS, Marise. Secretaria de Educação do Estado do Pará 2008. **Concepção do Ensino Médio Integrado.** Disponível em: <http://www.iiep.org.br/curriculointegrado.pdf>. Acesso em: 27 nov. 2015.

SELHORST, Mário, **3ª Unidade: Geometria Analítica no Plano**. Disponível em: < http://www.eqm.unisul.br/disciplinas/ga/Unid3Plano.pdf>. Acesso em: 27 nov. 2015.

SLIDESHARE, **Equações: História, Contextualização e Aplicação**. Disponível em <http://pt.slideshare.net/inechidias/equaes-histria-contextualizao-e-aplicao.> Acesso em: 27 nov. 2015.

UOL EDUCAÇÃO**, Coordenadas Geográficas: Latitude, Longitude e GPs.** Disponível em: <http://educacao.uol.com.br/disciplinas/geografia/coordenadas-geograficas-latitude-longitude-e-gps.htm.> Acesso em: 27 nov. 2015.

ANEXO B – TUTORIAL BÁSICO DO SOFTWARE GEOGEBRA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MINAS GERAIS CAMPUS SÃO JOÃO EVANGELISTA

ARLISON FERNANDES DOS SANTOS; EMILSON JÚNIO NOGUEIRA ARAÚJO; WEMERSON JOSÉ SILVA

TUTORIAL BÁSICO DO SOFTWARE GEOGEBRA

SÃO JOÃO EVANGELISTA-MG
2015

SUMÁRIO

SÃO JOÃO EVANGELISTA-MG
2015

TUTORIAL BÁSICO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

1 SOBRE O *SOFTWARE* GEOGEBRA

Criado por Markus Hohenwarter (figura 1), o GeoGebra é um *software* gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o Ensino e Aprendizagem da Matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). O GeoGebra reúne recursos de Geometria, Álgebra, tabelas, gráficos, Probabilidade, Estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Além dos aspectos didáticos, o GeoGebra é uma excelente ferramenta para se criar ilustrações profissionais para serem usadas no Microsoft Word, no Open Office ou no LaTeX. Escrito em JAVA e disponível em português, o GeoGebra é multiplataforma e, portanto, ele pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS.

Figura 1[24] – Foto de Markus Hohenwarter.

Markus Hohenwarter
Creator of GeoGebra, Project Director
markus@geogebra.org

Fonte: Foto encontrada no site ebah.com.br

Para fazer o download do software, bem como, adquirir todas as informações de instalação e o tutorial contendo instruções de uso e exemplos do GeoGebra basta acessar o sítio (figura 2): http://www.geogebra.org/cms/pt_BR.

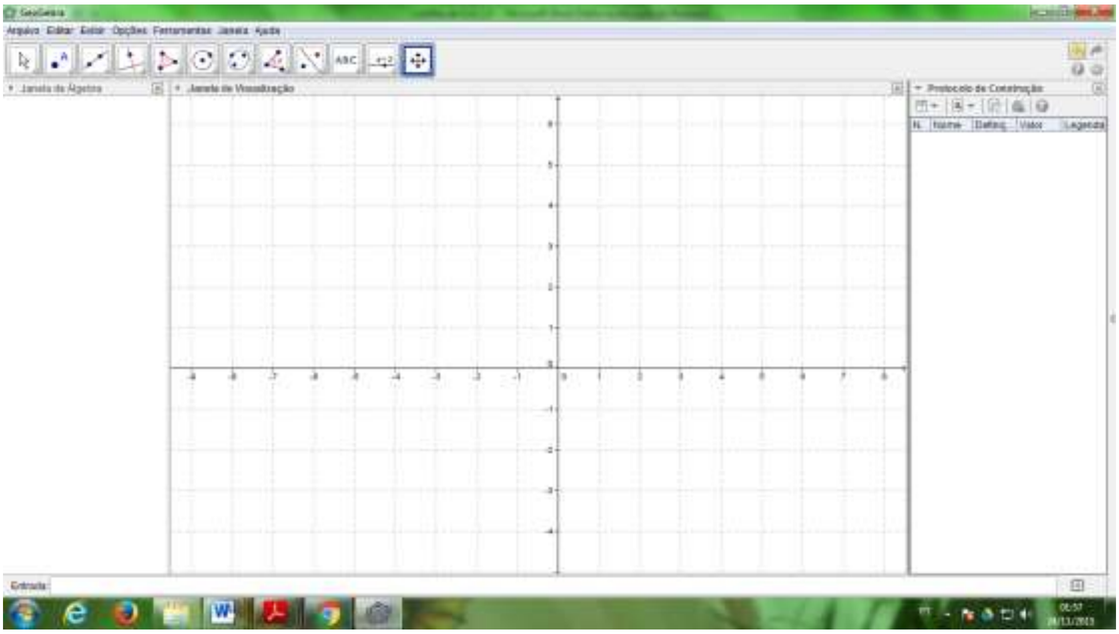
[24] Disponível em: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAgIToAJ/geogebra?part=2> Acesso em 15 de Jan. 2016.

Figura 2[25] – Interface do site do *software* GeoGebra

Fonte: Foto extraída do site geogebra.org

O *software* GeoGebra possui vários recursos que podem ser utilizados para o estudo de Geometria, Álgebra e Cálculo de forma dinâmica. Porém, iremos descrever apenas alguns recursos que são necessários para a implementação das atividades apresentadas nesse material. Para um aprofundamento em outros recursos do software, basta baixar o tutorial no sítio descrito acima.

Figura 3 – Tela inicial do *Software* GeoGebra



Fonte: Arquivo dos autores.

[25] Disponível em: <http://www.geogebra.org/cms/pt_BR> Acesso em 15 de Jan. 2016.

O GeoGebra fornece três diferentes vistas dos objetos matemáticos: a Janela de Visualização (*Zona Gráfica)*, a Janela de Álgebra ou Numérica (*Zona Algébrica)*, e o Protocolo de Construção (*Folha de Cálculo)*. Elas permitem mostrar os objetos matemáticos em três diferentes representações: graficamente (e.g., pontos, gráficos de funções), algebricamente (e.g., coordenadas de pontos, equações) e nas células da folha de cálculo. Assim, todas as representações do mesmo objeto estão ligadas dinamicamente e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em qualquer delas, independentemente da forma como esses objetos foram inicialmente criados.

1.1 BARRA DE MENUS

Possui 7 comandos que permitem alterar/salvar os programas criados.

1.2 BARRA DE FERRAMENTAS

É dividida em 12 janelas que apresentam várias ferramentas que podem ser visualizadas clicando na parte inferior de cada ícone.

1.3 ENTRADA DE COMANDOS

Zona destinada à entrada dos comandos/condições que definem os objetos. Neste campo escrevemos as equações, funções e coordenadas dos pontos e teclamos “Enter” para representá-los na janela de gráficos. (observação: alguns comandos podem ser representados direto através da Barra de Ferramentas).

1.4 ZONA GRÁFICA

Usando as ferramentas disponíveis na *Barra de Ferramentas*, podem-se realizar construções geométricas na *Zona Gráfica* com o mouse. Selecione qualquer ferramenta na *Barra de Ferramentas* e leia a *Ajuda da Ferramenta* (a seguir à barra de ferramentas) para ver como usar a ferramenta selecionada. Cada objeto criado na *Zona Gráfica* tem também uma representação na *Zona Algébrica*.

Nota: podem-se mover objetos na *Zona Gráfica* arrastando-os com o mouse. Ao mesmo tempo, as suas representações algébricas são atualizadas automaticamente na *Zona Algébrica*.

Cada ícone na Barra de Ferramentas representa uma caixa de ferramentas que contém um conjunto de ferramentas similares. Para abrir uma caixa de ferramentas, tem que clicar na pequena flecha situada no canto inferior direito do respectivo ícone.

Sugestão: as ferramentas estão organizadas segundo a natureza dos objetos resultantes. Existem ferramentas que criam diferentes tipos de pontos na *Caixa de Ferramentas de Ponto* (ícone) e ferramentas que permitem aplicar transformações geométricas na *Caixa de Ferramentas de Transformação* (ícone).

1.5 ZONA ALGÉBRICA

Usando a *Entrada de Comandos* pode-se inserir diretamente expressões algébricas no GeoGebra. Após ter clicado a tecla *Enter*, a expressão algébrica digitada aparece na *Zona Algébrica* e a respectiva representação gráfica aparece na *Zona Gráfica*. Por exemplo, inserindo $f(x) = x\text{^}2$ aparece a função *f* na *Zona Algébrica* e o respectivo gráfico na *Zona Gráfica*.

Na *Zona Algébrica*, os objetos matemáticos são organizados em duas classes: objetos livres e objetos dependentes. Ao se criar um novo objeto sem que para tal se use qualquer objeto existente, ele é classificado como objeto livre. Se, pelo contrário, o seu novo objeto for criado com recurso a objetos já existentes, ele é classificado como objeto dependente.

Sugestão: se quiser esconder a representação algébrica de um objeto na *Zona Algébrica*, pode especificá-lo como um Objeto Auxiliar. Para isso, comece por clicar com o botão direito do mouse (MacOS: *Ctrl*-clique) na representação algébrica do objeto e selecione ‘Propriedades’ no *Menu de Contexto* que aparece. Depois, no separador ‘Básico’ do Diálogo de Propriedades pode-se especificar o objeto como ‘Objeto auxiliar’. Por padrão, os objetos auxiliares não são mostrados na *Zona Algébrica*, mas pode-se mudar esta configuração selecionando o item ‘Objetos auxiliares’ no menu *Exibir*.

Note que também se podem modificar objetos na Zona Algébrica. Para isso, comece por assegurar-se que se tem a ferramenta *Mover* ativada antes de fazer duplo clique com o botão esquerdo do mouse sobre um objeto livre na *Zona Algébrica*. Depois, na caixa de texto que aparece, pode-se editar diretamente a representação algébrica do objeto. Finalmente, após ter clicado a tecla *Enter*, a representação gráfica do objeto será adaptada automaticamente às alterações efetuadas.

Ao se fazer duplo clique com o botão esquerdo do mouse sobre um objeto dependente na *Zona Algébrica*, aparece uma janela de diálogo que permite redefinir o objeto. O GeoGebra também oferece uma vasta gama de comandos que podem ser inseridos no *Campo de Entrada*. Pode-se abrir a lista de comandos no lado direito da *Barra de Comandos*, clicando no botão 'Comando'. Depois de selecionar um comando nesta lista (ou digitar o seu nome diretamente no *Campo de Entrada*), pode-se pressionar a tecla *F1* para se obter informação sobre a sintaxe e os argumentos requeridos para aplicar o correspondente comando.

1.6 FOLHA DE CÁLCULO

Na *Folha de Cálculo* do GeoGebra, cada célula tem um nome específico que permite identificá-la diretamente. Por exemplo, a célula na coluna *A* e linha *1* é nomeada *A1*.

Nota: o nome de uma célula pode ser usado em expressões e em comandos para identificar o conteúdo da célula correspondente. Nas células da folha de cálculo pode-se inserir não só números, mas também todo o tipo de objetos matemáticos suportados pelo GeoGebra (eg., coordenadas de pontos, funções, comandos). Se possível, o GeoGebra mostra imediatamente na *Zona Gráfica* a representação gráfica do objeto inserido numa célula. O objeto toma o nome da célula usada para criá-lo (e.g., *A5*, *C1*).

Nota: por padrão, os objetos na folha de cálculo são classificados como Objetos Auxiliares na *Zona Algébrica*. Pode-se exibir ou esconder estes Objetos Auxiliares marcando ou desmarcando o item 'Protocolo de Construção' no menu *Exibir*.

2 FERRAMENTAS DE CONSTRUÇÃO

As seguintes ferramentas/modos de construção podem ser ativadas clicando nos botões da Barra de Ferramentas. Pode clicar na pequena flecha situada no canto inferior direito de um ícone para abrir um menu (‘Caixa de Ferramentas’) que contém ferramentas do mesmo tipo.

Nota: Com a maior parte das ferramentas pode facilmente criar novos pontos clicando em espaços vazios da *Zona Gráfica*.

Selecionar Objetos

Para ‘selecionar um objeto’ deve clicar nele com o mouse após ter selecionado a ferramenta *Mover*.

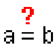
 **Copiar estilo visual**

Esta ferramenta permite-lhe copiar propriedades visuais (cor, tamanho, estilo da linha) de um objeto para outros. Para fazê-lo, primeiro selecione o objeto cujas propriedades pretendem copiar. Depois, clique nos objetos que herdarão essas propriedades.

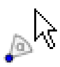
 **Apagar**

Clique em qualquer objeto que queira apagar.

Nota: Pode usar o botão ‘Desfazer’ se apagar acidentalmente o objeto errado.

 **Relação entre dois objetos**

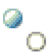
Selecione dois objetos para obter informação sobre a sua relação numa janela que se abre (veja também o comando Relação).

 **Rodar em torno de um ponto**

Selecione primeiro o ponto que é o centro da rotação. Depois, pode rodar objetos livres em torno desse centro arrastando-os com o mouse.

 **Exibir / Esconder rótulo**

Clique num objeto para exibir ou esconder o respectivo rótulo.

 **Exibir / Esconder objetos**

Selecione os objetos que quer exibir ou esconder depois de ativar esta ferramenta. Então, mude para qualquer outra ferramenta para aplicar as alterações na visibilidade desses objetos.

Nota: Quando ativa esta ferramenta, todos os objetos que podem ser escondidos são realçados. Desta maneira, pode facilmente exibir/esconder outra vez os objetos desativando a sua seleção antes de mudar para outra ferramenta.

 **Ampliar**

Clique em qualquer lugar da Zona Gráfica para ampliar a sua construção (veja também Personalizar a Zona Gráfica)

 **Reduzir**

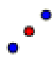
Clique em qualquer lugar da *Zona Gráfica* para reduzir a sua construção (veja também Personalizar a Zona Gráfica)

2.1 PONTOS

 **Novo ponto**

Clique na *Zona Gráfica* para criar um novo ponto.
Nota: As coordenadas do ponto são fixadas quando o botão do rato é libertado. Clicando num segmento, reta, polígono, cónica, gráfico de função ou curva, pode criar um ponto nesse objeto (veja também o comando Ponto).

Nota: Clicando na interseção de duas linhas cria um ponto de intersecção (veja também o comando Interseção de dois objetos).

 **Ponto médio ou centro**

Pode clicar em dois pontos ou num segmento para obter o respectivo ponto médio.
Também pode clicar numa secção cónica (circunferência) para criar o respectivo centro.

Intersectar de dois objetos

Os pontos de intersecção de duas linhas podem ser criados de duas maneiras:

• Se selecionar duas linhas, ***todos os pontos de interseção*** são criados (se possível).

• Se clicar diretamente sobre uma intersecção de duas linhas, ***apenas um ponto de interseção*** é criado.

Nota: Para segmentos, semiretas ou arcos, pode especificar se pretende ou não 'Permitir pontos de intersecção exteriores' no separador 'Básico' do Diálogo de Propriedades. Isto pode ser usado para obter pontos de intersecção situados na extensão de tais linhas. Por exemplo, a extensão de um segmento ou semireta é uma reta.

2.2 VETORES

Vector definido por dois pontos

Selecione o ponto origem e depois o ponto extremidade do vetor.

Vector aplicado num ponto

Selecione um ponto *A* e um vetor ***v*** para criar um novo ponto *B* = *A* + ***v*** bem como o vetor de *A* para *B*.

2.3 SEGMENTOS

Segmento definido por dois pontos

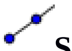
Selecione dois pontos *A* e *B* para criar um segmento entre *A* e *B*. O comprimento do segmento aparece na *Zona Algébrica*.

Segmento dados um ponto e o comprimento

Clique num ponto *A* que é o extremo inicial do segmento. Especifique o comprimento desejado no campo de texto da janela de diálogo que aparece.

Nota: Esta ferramenta cria um segmento com comprimento ***a*** e ponto final *B*, o qual pode ser rodado em torno do ponto inicial *A* usando a ferramenta *Mover*.

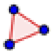
2.4 SEMIRETAS



Semireta definida por dois pontos

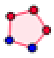
Selecione um ponto *A* e depois um ponto *B* para criar a semireta de origem *A* passando por *B*. A equação da reta correspondente aparece na *Zona Algébrica*.

2.5 POLÍGONOS



Polígono

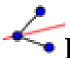
Selecione sucessivamente pelo menos três pontos, os quais serão os vértices do polígono. Depois, clique outra vez no primeiro ponto para fechar o polígono. A área do polígono é mostrada na *Zona Algébrica*.



Polígono regular

Selecione dois pontos *A* e *B* e especifique o número *n* de vértices no campo de texto da janela de diálogo que aparece. Isto resulta em um polígono regular com *n* vértices (incluindo *A* e *B*).

2.6 RETAS



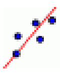
Bissectriz

Uma bissetriz pode ser definida de duas maneiras:

• Selecionando três pontos *A*, *B* e *C* produz a bissectriz do ângulo que tem vértice *B*.

• Selecionando duas retas (semiretas ou segmentos de reta) produz as bissetrizes dos dois ângulos formados por tal par de objetos ou respectivos prolongamentos.

Nota: Qualquer bissetriz tem vetor diretor com comprimento 1.



Reta de regressão

Pode criar a reta de regressão de um conjunto de pontos usando duas maneiras diferentes:

• Crie um Retângulo de Seleção que contém todos os pontos do conjunto.

• Selecione uma lista de pontos para criar a correspondente reta de regressão.

Reta definida por dois pontos

Selecionando dois pontos *A* e *B* cria a reta que passa por *A* e *B*. O vetor diretor desta reta é (*B* - *A*).

Reta paralela

Selecionando uma reta *g* e um ponto *A* define a reta que passa por *A* paralelamente a *g*. A direção de tal paralela é a direção da reta *g*.

Mediatriz

Clique num segmento *s* ou em dois pontos *A* e *B* para criar a mediatriz.

Nota: A direção da mediatriz é equivalente ao vector perpendicular a *s* ou *AB*.

Reta perpendicular

Selecionando uma reta *g* e um ponto *A* cria a reta passando por *A* perpendicularmente à reta *g*.

Reta polar ou diametral

Esta ferramenta cria a reta polar ou a reta diametral de uma cónica:

• Cria a polar selecionando um ponto e uma cónica.

• Cria a diametral selecionando uma reta (ou um vector) e uma cónica.

Tangentes

As tangentes a uma cónica podem ser produzidas de duas maneiras:

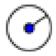
• Selecionando um ponto *A* e uma cónica *c* produz todas as tangentes a *c* que passam em *A*.

• Selecionando uma reta *g* e uma cónica *c* produz todas as tangentes a *c* que são paralelas à reta *g*.

• Selecionando um ponto *A* e uma função *f* produz a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto (*x(A)*, *f(x(A))*).

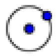
Nota: *x(A)* representa a abscissa do ponto *A*. Se o ponto *A* pertencer ao gráfico de *f* então a tangente passa por *A*.

2.7 SEÇÕES CÓNICAS



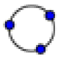
Circunferência dados o centro e o raio

Selecione o centro *M* e insira a medida do raio no campo de texto da janela que aparece.



Circunferência dados o centro e um ponto

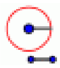
Selecionando um ponto *M* e um ponto *P* define a circunferência de centro *M* passando por *P*.
Nota: O raio de tal circunferência é a distância *MP*.



Circunferência definida por três pontos

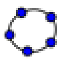
Selecionando três pontos *A*, *B* e *C* define a circunferência que passa nestes três pontos.

Nota: Se os três pontos pertencerem a uma reta, a circunferência degenera nessa reta.



Compasso

Selecione um segmento ou dois pontos para especificar o raio. Depois, clique num ponto que será o centro da circunferência.

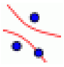


Cónica passando por cinco pontos

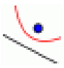
Selecionando cinco pontos produz a secção cónica que passa nesses pontos.
Nota: Se quatro desses pontos estiverem numa reta, a cónica não é definida.

Elipse

Selecione dois pontos que serão os focos da elipse. Depois, especifique um terceiro ponto que pertence à elipse.

 **Hipérbole**

Selecione dois pontos que serão os focos da hipérbole. Depois, especifique um terceiro ponto que pertence à hipérbole.

 **Parábola**

Selecione um ponto e uma reta, a qual será a diretriz da parábola.

2.8 NÚMEROS E ÂNGULOS

 **Ângulo**

Esta ferramenta cria:

• Um ângulo entre três pontos cujo vértice é o segundo ponto selecionado.
• Um ângulo entre dois segmentos.
• Um ângulo entre duas retas.
• Um ângulo entre dois vectores.
• Todos os ângulos de um polígono.

Nota: Se o polígono for criado selecionando os seus vértices com orientação anti-horária, a ferramenta *Ângulo* produz os ângulos internos do polígono, senão produz os correspondentes complementos para 360 graus.

Nota: Por defeito, os ângulos são criados com orientação anti-horária. Portanto, a ordem pela qual são selecionados os objetos que definem os ângulos é relevante para esta ferramenta. Se quiser limitar a amplitude dos ângulos a 180°, desmarque 'Permitir ângulos reentrantes' no separador 'Básico' do respectivo *Diálogo de Propriedades*.

 **Ângulo com amplitude fixa**

Selecione dois pontos A e B e especifique a medida da amplitude do ângulo no campo de texto da janela que aparece. Esta ferramenta cria um ponto C e um ângulo α, onde α é o ângulo ABC.

Área

Esta ferramenta fornece o valor numérico da área de um polígono, de um círculo ou de uma elipse e mostra um texto dinâmico na *Zona Gráfica*.

Distância, comprimento ou perímetro

Esta ferramenta fornece a distância entre dois pontos, duas retas ou entre um ponto e uma reta e mostra um texto dinâmico na *Zona Gráfica*. Também fornece o comprimento de um segmento, o perímetro de um polígono e o perímetro de uma circunferência ou de uma elipse.

Seletor

Nota: No GeoGebra, um seletor é a representação gráfica de um número livre ou de um ângulo livre. Pode criar um seletor para qualquer número livre ou ângulo livre criado anteriormente exibindo esse objeto (veja Menu de Contexto; veja a ferramenta *Exibir/Esconder objetos*).

Clique em qualquer espaço livre da *Zona Gráfica* para criar um seletor para um número ou ângulo. A janela que aparece permite-lhe especificar o 'Nome', 'Intervalo' *[min, max]* e 'Incremento' do número ou do ângulo, bem como o 'Alinhamento' e 'Largura' do seletor (em pichéis).

A posição de um seletor pode ser absoluta (significa que o seletor não é afetado pelo zoom, ficando sempre visível na *Zona Gráfica*) ou relativa ao sistema coordenado (veja o Diálogo de Propriedades do correspondente número ou ângulo).

Nota: Na janela de diálogo de *Seletor* pode inserir o símbolo ° do grau ou *pi (π)* para o intervalo e para o incremento, usando os seguintes atalhos de teclado:

Alt-O (MacOS: *Ctrl-O*) para o símbolo ° do grau

Alt-P (MacOS: *Ctrl*-P) para o símbolo *π*

Inclinação

Esta ferramenta dá-lhe o declive *m* de uma reta e mostra na *Zona Gráfica* um triângulo retângulo em que a razão entre a medida do cateto vertical e a medida do cateto horizontal é o valor absoluto de *m*.

REFERÊNCIAS

CAMARGO, Paulo Cezar Guedes. **Algumas Aplicações do Software GeoGebra ao ensino da Geometria Analítica**. Vitória – ES, UFES – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. (Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional – PROFMAT). 09 de abril de 2013.

SOFTWARE GEOGEBRA, disponível em < http://www.geogebra.org/cms/pt_BR> Acesso em: 24 nov. 2015.