INSTITUTO FEDERAL DE MINAS GERAIS
CAMPUS SÃO JOÃO EVANGELISTA

AIRTON FLORA DE OLIVEIRA; AMANDA COSTA SANTOS;
JOÃO APARECIDO DE ANDRADE

A CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS DE PLATÃO ATRAVÉS DO *ORIGAMI* ALIADA À TEORIA DE VAN HIELE NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA EUCLIDIANA

SÃO JOÃO EVANGELISTA
2014

AIRTON FLORA DE OLIVEIRA; AMANDA COSTA SANTOS;
JOÃO APARECIDO DE ANDRADE

A CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS DE PLATÃO ATRAVÉS DO *ORIGAMI* ALIADA À TEORIA DE VAN HIELE NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA EUCLIDIANA

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto Federal de Minas Gerais - Câmpus São João Evangelista como exigência parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador (a): Ma. Jossara Bazílio de Souza Bicalho

SÃO JOÃO EVANGELISTA
2014

Oliveira, Airton Flora de
O48c A construção dos poliedros de Platão através do origami aliada à teoria de Van Hiele no processo de ensino e aprendizagem de geometria euclidiana . [manuscrito] / Airton Flora de Oliveira; Amanda Costa Santos; João Aparecido de Andrade. 2014
101 f. : il.

Orientador: Jossara Bazílio de Souza Bicalho

Monografia (Graduação) – Instituto Federal Minas Gerais, Campus São João Evangelista. Licenciatura em Matemática.

1. Poliedros de Platão. – Monografia. 2. Origami. – Monografia. 3. Teoria de Van Hiele. – Monografia. 4. Ensino de geometria. – Monografia. I. Santos, Amanda Costa. II. Andrade, João Aparecido de. III. Bicalho, Jossara Bazílio de. IV. Instituto Federal Minas Gerais, Campus São João Evangelista. Licenciatura em Matemática. V. Título.

CDU 514.12

Catalogação: Biblioteca Tarquínio J. B. de Oliveira - IFMG – Campus Ouro Preto

AIRTON FLORA DE OLIVEIRA; AMANDA COSTA SANTOS;
JOÃO APARECIDO DE ANDRADE

A CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS DE PLATÃO ATRAVÉS DO ORIGAMI ALIADA À TEORIA DE VAN HIELE NO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA EUCLIDIANA

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto Federal de Minas Gerais - Câmpus São João Evangelista como exigência parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em 13/11/14

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Prof. Ma. Jossara Bazílio de Souza Bicalho
IFMG – Campus SJE

Prof. Me. Sandro Salles Gonçalves
IFMG – Campus SJE

Silvino Domingos Neto

Profa. Silvino Domingos Neto
IFMG – Campus SJE

Aos nossos pais, que nos ensinaram o valor da
educação e a importância de sempre
perseverarmos em nossos sonhos.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos primeiramente a Deus que sempre esteve ao nosso lado desde o primeiro momento que iniciamos este trabalho.

Agradecemos a todos que, de alguma maneira, ajudaram no desenvolvimento deste trabalho, especialmente:

Aos nossos pais, que foram fundamentais na transmissão dos valores que nos tornaram pessoas de bem que hoje somos. A nossa eterna gratidão vai além de nossos sentimentos, pois a vocês foi cumprido o dom divino, de ser Pai e de ser Mãe.

À Ma. Jossara que dedicou seu tempo e compartilhou sua experiência para nossa formação fosse também um aprendizado de vida, nosso carinho e agradecimento. Pela paciência, dedicação e incentivo nos encontros de orientação.

A todos os professores do curso pela maneira como nos incentivaram e trilharam esse caminho repleto de novos saberes. Por todos os anos de compartilhamento seguro e paciente de conhecimento.

Aos membros da Banca Examinadora, Me. Silvino Domingos Neto e Me. Sandro Salles Gonçalves, pelos comentários e sugestões.

Aos colegas, que ouviram nossos desabafos, que com o passar dos anos nos acompanharam, choraram, riram, sentiram, participaram, aconselharam, dividiram as suas companhias, as alegrias e as palavras de carinho.

Deus nos concede, a cada dia,

uma página de vida nova no livro do tempo.

Aquilo que colocarmos nela, corre por nossa conta.

Chico Xavier

RESUMO

Esta pesquisa foi elaborada numa perspectiva de campo, de cunho qualitativo, aplicada na Escola Estadual “Major Lermino Pimenta”, localizada no distrito de Nelson de Sena, município de São João Evangelista, MG, para a 3ª série do Ensino Médio. Utilizou-se uma cartilha construída pelos pesquisadores sendo aplicada com a finalidade de estimular a participação ativa dos estudantes nas atividades propostas, bem como favorecer sua aprendizagem dos conceitos de Geometria através do *origami* na construção dos poliedros de Platão presentes nas construções dos módulos. Adotou-se a teoria de van Hiele, que é a teoria do desenvolvimento do pensamento em Geometria, como aporte teórico, e estabelece cinco níveis hierárquicos, no sentido de que só atinge determinado nível após dominar os níveis anteriores, buscando-se verificar o nível de conhecimento geométrico que os estudantes possuem em sua trajetória estudantil. A pesquisa aconteceu durante os meses de Setembro e Outubro de 2014, em 10 encontros, cada encontro com duração de 2 horas. A pesquisa foi dividida em etapas a saber: primeiramente a apresentação da proposta de pesquisa para a direção da escola e para com os sujeitos, depois foi aplicado o teste de van Hiele adaptado por Nasser e Sant’anna (2010), com o objetivo de verificar em qual nível de desenvolvimento do pensamento geométrico esses estudantes encontravam-se. Posteriormente, ocorreu uma oficina, esta através de aulas ministradas, onde foi entregue a cada estudante uma cartilha denominada Folha do Estudante, com o passo a passo das construções dos Poliedros de Platão através do *origami*. E por fim, aplicação do teste de sondagem para verificar se o *origami* constituiu-se de uma ferramenta metodológica no processo de ensino e aprendizagem de Geometria. Pelos dados recolhidos e pelas observações feitas durante a pesquisa percebeu-se o empenho dos estudantes nas atividades sendo notados avanços que eles tiveram nos conteúdos geométricos, como reconhecimento de algumas figuras geométricas (planas e espaciais), e de algumas propriedades existentes nessas figuras. Além disso, a análise das discussões e o comportamento dos estudantes mostrou o potencial do *origami* como alternativa pedagógica no processo de ensino e aprendizagem de Geometria Plana e Espacial.

Palavras-chave: Poliedros de Platão. *Origami*. Teoria de van Hiele. Ensino de Geometria.

ABSTRACT

This research has been prepared from the perspective of the field of qualitative nature , applied to the State School " Major Lermino Pimenta" , located in the Nelson district of Siena , the city of St. John the Evangelist , MG , for the 3rd year of high school . We used a primer built by researchers being applied in order to encourage active student participation in the proposed activities , and to promote their learning of the concepts of geometry through origami polyhedra in the construction of Plato present in constructions of modules , with van Hiele theory , which is the theory of the development of thought in geometry , as the theoretical , and establishes five hierarchical levels , in the sense that only reaches certain level after dominating the previous levels , seeking to ascertain the level of geometric knowledge students have in their student career . The research took place during the months of September and October 2014 , 10 meetings , each meeting lasting two hours . The research was divided into stages as follows : first presentation of the research proposal to the school board and with the guys , then we used the van Hiele test adapted by Nasser and Sant'Anna (2010) , with the objective of check which level of development of geometric thinking these students found themselves . Later , there was a workshop this through classes taught , which was given to each student a booklet called the Student Sheet , with step by step constructions of polyhedra Plato through origami. Finally , application of the pumping test to see if the origami consisted of a methodological tool in the teaching and learning of geometry process. By the data collected and the observations made during the survey it was noticed the engagement of students in activities which they have noticed improvements in geometric content, such as recognition of some geometric shapes (planar and spatial) , and some existing properties in these figures . Furthermore , the analysis of discussions and student behavior showed the potential of origami as a pedagogical alternative to the teaching and learning of Plane Geometry and Spatial .

Keywords : Polyhedra Plato . van Hiele theory . Origami . Teaching Geometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1- Elementos primordiais segundo Platão 23
Figura 2.2- Cristais na forma dos sólidos platônicos 24
Figura 3.1- Origami Tradicional 27
Figura 3.2- Origami Modular 28
Figura 3.3- Kusudama 28
Figura 3.4- Block Folding 29
Figura 3.5- Origami Tesselation 29
Figura 3.6- Wet Folding 30
Figura 3.7- Crease Pattern ou CP 30
Figura 3.8- Kirigami 31
Figura 3.9- Paper Craft 31
Figura 3.10- Oribana 32
Figura 4.1- Os níveis da teoria de van Hiele 38
Figura 4.2- As fases de aprendizagem da teoria de van Hiele 41
Figura 5.1- Hexaedro 46
Figura 5.2- Tetraedro 47
Figura 5.3- Octaedro 47
Figura 5.4- Icosaedro 48
Figura 5.5- Dodecaedro 48
Figura 5.6- Resposta do estudante A 51
Figura 5.7- Resposta do estudante B 51
Figura 5.8- Resposta do estudante A 52
Figura 5.9- Resposta do estudante C 52
Figura 5.10- Resposta do estudante C 53
Figura 5.11- Estudantes resolvendo atividades 53

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1- Quantidades de Questões Certas no teste de van Hiele 49

Tabela 5.2- Quantidades de Questões Certas no teste de Sondagem 54

Tabela 5.3- Quantidades de estudantes classificados nos níveis de acordo com o teste de van Hiele 56

Tabela 5.4- Quantidades de estudantes classificados nos níveis de acordo com o teste de Sondagem...57

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 5.1- Quantidades de Questões Certas no teste de van Hiele 50
Gráfico 5.2 - Quantidades de Questões Certas no teste de Sondagem............................... 55
Gráfico 5.3- Quantidades de estudantes classificados nos níveis de acordo com o teste de van Hiele 56
Gráfico 5.4 - Quantidades de estudantes classificados nos níveis de acordo com o teste de Sondagem.. 57

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **13**
2 ENSINO DE GEOMETRIA **17**
2.1 DESAFIOS E POSSIBILIDADES: UMA ABORDAGEM TEÓRICA 19
2.1.1 **A utilização de materiais manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem de Geometria** **21**
2.2 POLIEDROS DE PLATÃO 23
3 HISTÓRIA DO ORIGAMI **26**
3.1 ORIGAMI NO ENSINO E APRENDIZAGEM GEOMETRIA 32
4 A TEORIA DE VAN HIELE PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO EM GEOMETRIA **37**
4.1 OS NÍVEIS DA TEORIA DE VAN HIELE 38
4.2 AS FASES DE APRENDIZAGEM 40
4.3 TESTE DE VAN HIELE 42
5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS **44**
5.1 OS SUJEITOS DA PESQUISA 44
5.1.1 Instrumentos utilizados na pesquisa **44**
5.2 ATIVIDADES DESENVOLVIDAS- DESCRIÇÃO 45
5.3 ANÁLISE DOS DADOS 49
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS **58**
REFERÊNCIAS **59**
APÊNDICE **62**
ANEXOS **97**

1 INTRODUÇÃO

Nosso interesse sobre o *origami* surgiu durante as aulas de Prática Pedagógica, no curso de Licenciatura em Matemática, onde nos foi proposto que apresentássemos em forma de oficina a construção dos poliedros de Platão. Sendo assim, a oficina baseou-se no livro "Explorando Geometria com Origami" do PIC- OBMEP 2012. Num primeiro momento, o nosso interesse era simplesmente dobrar papeis e construir os sólidos geométricos. Após a oficina ministrada sentimo-nos envolvidos por essa arte. A partir deste momento começamos a pesquisar mais sobre o tema, a relação do *origami* e a Geometria, buscando investigar se existe um elo entre o *origami* e o ensino de Geometria.

Tendo como foco principal desenvolver neste trabalho uma investigação sobre as possibilidades do uso do *origami* no processo de ensino e aprendizagem da Geometria, chegamos à versão do problema que deveria nortear nosso trabalho:

Os diversos problemas relacionados ao ensino e aprendizagem de geometria devem-se ao fato desse conteúdo não ser trabalhado com o uso de materiais concretos e manipuláveis tal como o *origami*.

Porém, observando essa problemática acreditamos que com o uso do *origami* no estudo da Geometria os estudantes desenvolvem competências e habilidades necessárias para melhor compreensão da mesma. Com o *origami* pode-se ensinar, para os estudantes, conceitos geométricos no qual se estabelece uma relação de comparação entre a geometria teórica e a prática através da manipulação e construção dos Poliedros de Platão, visando à cognição das habilidades de acordo com a Teoria de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico. O *origami,* aliado à Teoria de van Hiele, constitui-se como um possível recurso didático e contribui para o ensino e aprendizagem de Geometria.

Para que o problema proposto pudesse ser solucionado de maneira objetiva, relacionando a técnica do *origami* e a teoria de van de Hiele, definiu-se como objetivo geral:

Verificar se a utilização do *origami* incentiva os estudantes a estudar geometria, com intuito de que os mesmos possam desenvolver habilidades tais como observação, concentração, análise, trabalhando com materiais manipuláveis de modo que possam avançar no seu desenvolvimento, segundo a Teoria de van Hiele, tendo como objetivos específicos:

- Orientar e avaliar as habilidades de visualização dos estudantes na formação do pensamento geométrico segundo a Teoria de van Hiele;

- Trabalhar de maneira dinâmica, de modo a despertar a atenção, o grau de curiosidade e o envolvimento dos estudantes nas atividades;
- Inserir no ambiente escolar as diversas aplicabilidades do *origami* relacionadas ao conteúdo Matemático.

O projeto constituiu-se de uma pesquisa de campo, de cunho qualitativo, aplicado na Escola Estadual "Major Lermino Pimenta", localizada no distrito de Nélson de Sena, município de São João Evangelista, MG, para a 3ª série do Ensino Médio. Com a finalidade de estimular a participação ativa dos estudantes nas atividades propostas, bem como favorecer sua aprendizagem dos conceitos de Geometria através do *origami* na construção dos poliedros de Platão. Para isto, a utilização da Teoria de van Hiele para aprendizagem de conceitos geométricos é indicada, porque propicia uma compreensão progressiva dos conceitos por parte dos estudantes e por, até o presente momento, estar mais fundamentada em trabalhos envolvendo a Geometria Plana e a Geometria Espacial (NASSER & SANT'ANNA *apud* FERREIRA, 2013, p.13), mostrando assim, o caráter inovador do mesmo.

A proposta era que com base na análise dos dados obtidos através dos testes de van Hiele verificar o nível do desenvolvimento do pensamento geométrico dos sujeitos da pesquisa. Desta forma, a partir de pesquisas realizadas baseamos nas ideias de Nasser (2010), Sant'anna (2010) e Crowley (1994).

De acordo com o PCN (1998), os conceitos geométricos constitui parte importante no currículo de matemática, pois por meio deste o estudante desenvolve um tipo especial de pensamento que permite representar e compreender o mundo em que vive. A Geometria deve ser considerada um elemento que auxilia na estruturação do pensamento matemático, que possibilita os estudantes estabelecer relações e compreender o espaço.

Mesmo a Geometria tendo sua importância dentro da matemática, pesquisas apontam o seu gradual abandono do seu ensino. Em decorrência desse abandono, muitos estudantes deixaram de conhecer essa importante área da Matemática. De acordo com Gazire:

> Durante a segunda metade deste século, a Geometria parece estar progressivamente perdendo sua posição no ensino da Matemática, na maioria dos países. Os sintomas desse abandono podem ser encontrados em várias pesquisas de âmbito nacional e internacional. Frequentemente, a Geometria é completamente ignorada, ou, então, apenas alguns itens ligados a ela são incluídos. Nesse caso, as questões tendem a limitar-se a certos fatores sobre figuras simples e suas propriedades e a abordagem é relativamente pobre (GAZIRE, 2000, p. 35).

O que causou um distanciamento da Geometria do cotidiano dos estudantes, ocasionando assim, uma dificuldade de entendimento e compreensão pelos mesmos. Em busca de um embasamento para justificar a relevância do estudo as pesquisas de Gazire (2010), Pavanello (1989), Lorenzato (1995) tornam-se fundamentais na descrição sobre o ensino de Geometria.

A utilização de atividades que levam os estudantes a tocar o seu objeto de estudo em sala de aula, pode colaborar de maneira positiva, de modo que estes interajam e participam da construção do conhecimento. Por isso, foi utilizado o *origami* como uma possível ferramenta de apoio no estudo de Geometria na construção dos poliedros de Platão.

Para Rancan e Giraffa:

> No processo de construção e de desconstrução de um Origami, são desenvolvidos aspectos como a observação, o raciocínio, a lógica, a visão espacial e artística, a perseverança, a paciência e a criatividade. Ao analisar os passos de construção de um Origami, percebe-se que diversas dobraduras foram utilizadas para se chegar ao resultado. Quando se observa mais atentamente os passos utilizados e suas combinações, verifica-se que novos padrões foram gerados. (RANCAN; GIRAFFA, 2012, p.2).

Sendo assim, os professores trabalham o raciocínio matemático, especialmente os conteúdos relacionados à Geometria, uma vez que pode-se questionar os estudantes acerca dos diversos aspectos de cada construção, bem como a sequência em que foram feitas determinadas dobraduras. Para relacionar as ideias do *origami* com o ensino de Geometria tem-se como suporte as pesquisas de Rancan e Giraffa (2012) e Pirola (2004).

Em síntese, na organização da monografia dividiu-se o trabalho em 4 capítulos, além da introdução, considerações finais, referências, apêndices e anexos. No capítulo 2 fez-se um levantamento bibliográfico referente ao ensino de Geometria, relacionando os desafios e possibilidades numa abordagem teórica, e, um enfoque sobre os poliedros de Platão.

No capítulo seguinte foi apresentado um breve contexto histórico acerca do *origami* e sua contribuição no ensino de Geometria.

Já no capítulo 4, encontra-se delineada a teoria de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento em Geometria, além da descrição detalhada de cada nível, das fases de aprendizagem e do teste de van Hiele para verificação do nível do desenvolvimento do pensamento em Geometria.

Finalmente no capítulo 5, foram apresentados os procedimentos metodológicos da pesquisa, com a aplicação do teste de van Hiele, a descrição dos encontros realizados, análise da oficina de *origami* na construção dos poliedros de Platão, aplicação do teste de sondagem, por fim, análise dos dados obtidos. A pesquisa foi encerrada com uma reflexão sobre tudo que constatamos durante a realização da pesquisa.

2 ENSINO DE GEOMETRIA

A Geometria é um dos ramos mais importantes da Matemática. Seu estudo surgiu de forma intuitiva e da necessidade humana, teve sua origem no Egito as margens do rio Nilo no século V a.C. A palavra Geometria é de origem grega, deriva da palavra *geometrein*, onde *geo*, significa terra e *metrein*, significa medir, assim, geometria é a ciência de medir terras.

As primeiras ideias geométricas surgiram na busca do homem por estratégias na resolução de problemas do cotidiano, como afirma Grando:

> Buscando a origem do desenvolvimento da geometria nos primórdios, com o homem primitivo, podemos imaginar que o conhecimento das configurações do espaço, formas e tamanhos tenham se originado, possivelmente, com a capacidade humana de observar e refletir sobre os deslocamentos, com a construção de estratégias de caça e colheita de alimentos, com a criação de ferramentas e utensílios, visando satisfazer suas necessidades básicas. Ao fixar moradia, com a divisão do trabalho, outras necessidades foram surgindo e a produção do conhecimento geométrico se ampliando. A necessidade de fazer construções, delimitar a terra levou à noção de figuras e curvas e de posições como vertical, perpendicular, paralela. (GRANDO, 2008, p. 7).

Ainda relacionando a Geometria com o cotidiano do homem, Cavacami e Furuya:

> A Geometria esteve presente na vida do homem desde a antiguidade, principalmente nas civilizações egípcia e babilônica, que a utilizavam como instrumento na resolução de problemas de medir, em cálculos de distâncias, volumes e áreas. Desde então o uso da Geometria é uma constante na vida do homem e hoje o seu estudo é inserido no ensino da Matemática desde os primeiros anos escolares. No entanto, é notório a dificuldade no aprendizado e a falta de motivação no estudo da Geometria.(CAVACAMI; FURUYA, 2012, p. 5).

Vivemos em mundo, principalmente nas cidades, cercado de figuras geométricas; elas estão em diversos lugares, como por exemplo, nas casas, nos espaços urbanos, nas obras de engenharia, nas artes, etc. Dessa forma Lorenzato afirma que:

> A geometria aparece nas atividades humanas e está presente no dia-a-dia das pessoas e da natureza através de curvas, formas e relações geométricas. As espirais, por exemplo, podem ser encontradas em caramujos, botões de flor, girassóis, margaridas, presas de elefante, chifres, unhas, abacaxis, frutos do pinheiro. Também encontramos muitas outras formas geométricas nos cristais, favos e flores, além de inúmeros exemplos de simetria. (LORENZATO, 1995, p. 25)

Através do ensino de Geometria os estudantes tem a possibilidade de participar ativamente no processo de construção do seu próprio conhecimento. Com desenhos, visualizações, comparações, transformações e construções é possível realizar essa participação dos estudantes.

Os conceitos geométricos permitem aos estudantes desenvolver um pensamento que possibilita descrever, compreender e representar o mundo em que está inserido. Lorenzato (1995) afirma que a Geometria é um excelente apoio às outras disciplinas: como interpretar um mapa, sem o auxílio de Geometria? Como compreender conceitos de medida sem ideias geométricas? Deste modo, torna-se uma possível base para determinadas compreensões e representação de relações, com as demais áreas do conhecimento.

De acordo com Rancan:

> O ensino e a aprendizagem de Geometria encontram-se vinculados à manipulação. No entanto, uma das principais características da Matemática está relacionada à necessidade de existências de hipóteses como suporte para uma conclusão. Essas hipóteses precisam ser validadas e provadas para que se tenha uma afirmação final válida; a esse procedimento chamamos de demonstração. (RANCAN, 2011, p.24).

Todavia, sabe-se que alguns estudantes saem do Ensino Médio sem nunca ter realizado uma demonstração. Segundo Almeida e Costacurta (2010) a Geometria é, dos tópicos da Matemática, que recebe uma de duas respostas dos alunos do final do ensino médio: ou não gostaram e por isso pouco se lembram dos conceitos que estudaram, ou pouco estudaram sobre a Geometria. Isso deve-se ao fato de que os professores às vezes não se sentem à vontade para ensinar esse conteúdo, assim a geometria fica ausente na sala de aula. Vários motivos podem explicar essas ausências, um dos motivos é os professores não possuírem os conhecimentos geométricos necessários para poderem ensinar a geometria. Lorenzato afirma que:

> Considerando que o professor que não conhece Geometria também não conhece o poder, a beleza e a importância que ela possui para a formação do futuro cidadão, então, tudo indica que, para esses professores, o dilema é tentar ensinar Geometria sem conhecê-la ou então não ensiná-la. (LORENZATO, 1995, p. 3).

O certo seria se o professor procurasse pesquisar mais para aprender e passar para seus alunos maior segurança e conhecimento sobre tal área matemática que encanta a muitos com sua complexidade.

De acordo Pirola,

> O ensino da matemática em geral nas escolas é encarado como um obstáculo, grande parte dos alunos considera esta disciplina difícil e desinteressante, É preciso,

> portanto, desenvolver atividades motivadoras que despertem a atenção dos alunos, facilitando assim o processo de ensino aprendizagem. (PIROLA, 2004, p. 9).

Dessa forma foi utilizado o *origami* como uma atividade lúdica no processo de ensino e aprendizagem de geometria, apresentando aos estudantes os conceitos geométricos a partir das dobras realizadas.

2.1 DESAFIOS E POSSIBILIDADES: UMA ABORDAGEM TEÓRICA

Várias são as pesquisas em Educação Matemática, que tem buscado alternativas pedagógicas no processo de ensino e aprendizagem em Geometria, devido ao fato desse conteúdo ser pouco ou quase não ser trabalhado em sala de aula. Diante dessas pesquisas e discussões em relação ao não aprendizado de Geometria, foi feito um levantamento teórico com ideias de alguns pesquisadores sobre os desafios e possibilidades no ensino de Geometria.

Referentes às dificuldades apresentadas no ensino de geometria, Arbach (2002), ressalta que a partir do Movimento da Matemática Moderna a geometria foi perdendo seu espaço para a Álgebra ficando em segundo plano no ensino de Matemática. E segundo Pavanello:

> A geometria é praticamente excluída do currículo escolar ou passa a ser, em alguns casos restritos, desenvolvida de uma forma muito mais formal a partir da introdução da Matemática Moderna, a qual se dá justamente quando se acirra a luta pela democratização das oportunidades educacionais, concomitante à necessidade de expansão da escolarização a uma parcela mais significativa da população. (PAVANELLO, 1995, p.2).

Essa é uma falha que se pode atribuir a vários educadores que, por não terem segurança nesta área da matemática, deixam de mostrar aos seus estudantes tal encantamento fazendo com que isso contribua para o caos em que se encontra essa disciplina hoje.

Gazire destaca,

> Quanto à Matemática Moderna, ela tem sua parcela de culpa de contribuição no atual caos do ensino de Geometria, pois, antes de sua chegada no Brasil, embora nossos alunos a detestassem, havia um ensino geométrico que era marcantemente lógico-dedutivo e com demonstrações. Após sua passagem, a sua proposta de algebrizar a Geometria não vingou no Brasil, mas conseguiu eliminar o modelo anterior. Isto criou assim uma lacuna em nossas práticas pedagógicas, a qual perdura até hoje. (GAZIRE, 2000, p.55).

Nesta perspectiva, Neves (2008) afirma que devido ao formalismo imposto pelo Movimento da Matemática Moderna, uma grande parte da população mundial foi deixada em segundo plano, pois não conseguiu acompanhar e nem dominar uma linguagem simbólica da qual a matemática se revestiu e elegeu poucos com habilidades para esse tipo de linguagem como os eleitos, alastrando o mito da "matemática para poucos", de a "capacidade cognitiva para a matemática ser inata", gerando assim, excluídos.

Essa ideologia formalista encontra-se presente em nosso dia a dia nas salas de aula, determinando a maneira como o professor dá sua aula. Neves (2008) ainda afirma, que "segundo os postulados dessa corrente, a seleção dos mais fortes será feita naturalmente e os alunos são os únicos responsáveis pelo seu baixo rendimento escolar em matemática, legitimando pelo consenso da "matemática para poucos ""."

Portanto, o Movimento da Matemática Moderna instituiu na prática do professor em sala de aula uma dinâmica oposta à própria ideia da ciência Matemática, o que vem colaborar nas dificuldades de promoção do saber matemático. Nesse sentido, Pavanello (1993) coloca ainda que a crescente demanda de escolas públicas em nível Médio interferiu no ensino de geometria, pois pela promulgação da lei 5692/71 que concedia às escolas a escolha sobre os programas das diferentes disciplinas possibilitou muitos professores de matemática, deixaram de ensinar Geometria. E aqueles que continuaram a ensiná-la, a ensinava de forma superficial e sua abordagem era trazida praticamente no final do livro didático.

E ainda de acordo com Pavanello (1995) esse costume de programar a geometria para o final do ano letivo é, de certo modo, reforçado pelos livros didáticos que, pelo que pude observar, abordam esse tema quase sempre por último, dando a impressão de que esta é a programação mais conveniente. Lorenzato pontua algumas causas que contribuíram para o afastamento do ensino de geometria nas aulas de matemática,

> Dentre elas, a primeira refere-se ao não conhecimento geométrico por parte dos professores na realização de suas práticas pedagógicas; e a segunda omissão geométrica deve-se ao exagero com que os professores dão ao livro didático, seja pela má formação ou pela cansativa jornada de trabalho que são submetidos. (LORENZATO, 1995, p. 3).

Gazire afirma,

> [...] Para muitos professores, o material didático é apenas um elemento motivador a ser usado em sala de aula e não um deflagrador de ideias matemáticas. Outros, inclusive, consideram que ver o material nas mãos do professor é suficiente para o aluno aprender. Estas ideias, aliás, são bastante difundidas entre os professores de

> matemática, fatos que descobrimos através de relatos em encontros profissionais. (GAZIRE, 2000, p.185-186).

Nesse sentido, verifica-se que, para o estudo da Geometria, os recursos que forem utilizados deverão ter o propósito de instigar o aluno a querer explorar e construir os conceitos geométricos. Outro propósito é tornar as aulas de Matemática mais interessantes, agradáveis e buscar contribuir para que esse conteúdo seja melhor compreendido por parte dos estudantes. Conforme os PCN,

> A recomendação do uso de recursos didáticos, incluindo alguns materiais específicos, é feita em quase todas as propostas curriculares. No entanto, na prática, nem sempre há clareza do papel desses recursos no processo ensino-aprendizagem, bem como da adequação do uso desses materiais, sobre os quais se projetam algumas expectativas indevidas. (BRASIL, 1998 p.23).

A utilização de materiais manipuláveis pode constituir-se como uma alternativa pedagógica durante as aulas, contribuindo para a aprendizagem dos estudantes em Geometria.

2.1.1 A utilização de materiais manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem de Geometria

O uso de diferentes materiais, atividades e, até mesmo, práticas de ensino podem facilitar o processo de ensino e aprendizagem da Geometria. E segundo Lorenzato:

> [...] Os estudantes devem realizar inúmeras experiências ora com o próprio corpo, ora com objetos e ora com imagens; para favorecer o desenvolvimento do senso espacial das crianças é preciso oferecer situações onde elas visualizem, comparem e desenhem formas: é o momento do dobrar, recortar, moldar, deformar, montar, fazer sombras, decompor, esticar... para, em seguida, relatar e desenhar, é uma etapa que pode parecer mero passatempo, porém é de fundamental importância (LORENZATO, 1995, p. 8).

Dessa forma através do objeto de estudo, os estudantes podem tocar, sentir, visualizar e movimentar; e a manipulação de materiais didáticos associados a teoria, pode surgir como alternativas pedagógicas permitindo um melhor entendimento dos conceitos matemáticos.

Dessa forma Sousa e Oliveira, afirmam que:

> [...] Materiais manipuláveis são objetos, desenvolvidos e/ou criados para trabalhar com conceitos matemáticos de forma que venha a facilitar a compreensão e o desenvolvimento do aluno, de modo que os estudos possam ser realizados de maneira prazerosa. (SOUSA; OLIVEIRA, 2010, p.2)

Segundo Nacarato (2005), o primeiro pesquisador em educação a destacar os materiais manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem foi suíço Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827) nascido Zurique em no século XIX, que acreditava que a educação iniciasse pelas visualizações e percepções de objetos concretos na realização de ações concretas e experimentais.

Nesse sentido, a pesquisa funda-se na utilização de materiais manipuláveis, especificamente o *origami*, como uma possível ferramenta para o desenvolvimento do pensamento cognitivo dos estudantes, referentes ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática, evidenciando a área de Geometria.

E de acordo com Almiro:

> A introdução de conceitos matemáticos, através da utilização de materiais manipuláveis, pode fazer com que a Matemática se torne viva e que as ideias abstractas tenham significado através de experiências com objectos reais. Numa situação de aprendizagem com materiais, os vários sentidos do aluno são chamados, através do contacto e da movimentação, envolvendo-o fisicamente, sendo esta interacção favorável à aprendizagem. (ALMIRO, 2004, p. 7).

Mas não basta apenas a utilização desses materiais se não houver um objetivo que se pretenda alcançar, que na verdade é a construção do conhecimento por parte do estudante, onde o professor se torna o mediador dessa construção, desempenhando um papel importantíssimo, podendo intervir e incentivar os estudantes nas realizações das atividades.

Segundo Scolaro:

> Com o material manipulável substituímos o fazer pelo ver e também substitui as atividades mecânicas e repetitivas, neste contexto de reconstrução o aluno torna-se sujeito de sua própria aprendizagem e o professor mediador desta e consequentemente as aulas vão se esquivando da monotonia na medida em que os alunos vão se interando e se apropriando do conhecimento trabalhado. (SCOLARO; 2009, p.7).

Assim, cabe ao professor propor uma metodologia que permita aos estudantes a construção do conhecimento com a sua mediação durante o processo de elaboração dos materiais didáticos manipuláveis e na aplicação em sala de aula, em busca de uma abordagem de maneira clara e sucinta, tornando o estudo da matemática dinâmico. Portanto, o professor deve selecionar e organizar suas aulas e investigar qual material ele poderá usar, em qual momento e quais conteúdos tratar com esses materiais.

Nacarato (2005) aponta a importância de se trabalhar com materiais manipuláveis nas aulas de Geometria, pois segundo ela é fundamental em todas as séries de todos os níveis de ensino, uma vez que eles possibilitam a visualização. Entre os materiais manipuláveis ela destaca o conjunto de sólidos geométricos, o tangram, o geoplano e os poliminós.

Para Muniz o estudante só aprende Geometria agindo sobre ela, e este precisa ser agente ativo nas construções dos conceitos e,

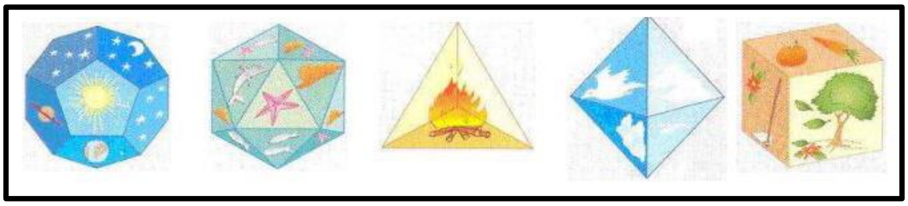
> Que o professor deve seguir a lógica do “olhar o mundo e agir sobre ele”, privilegiando o espaço a ser explorado, ter momentos de prazer na Geometria, trabalhando com jogos e ao confeccioná-los, valorizar o desenho e suas formas. Este deve ir além das quatro paredes, livro didático e quadro negro, precisa dar oportunidades para que o aluno se desenvolva e produza seus próprios conceitos, dando significado a sua aprendizagem. (MUNIZ, 2004, p.80).

Neste sentido o uso de materiais manipuláveis pode auxiliar tanto no estudo da Geometria, quanto nos demais conteúdos da matemática, facilitando a compreensão dos conceitos trabalhados e estimulando os estudantes na realização de atividades.

2.2 POLIEDROS DE PLATÃO

Platão nascido em Atenas por volta de 427 a.C. foi o primeiro a juntar tópicos que vão da matemática (ciência e linguagem) a religião (ética e arte), tendo abordado tais tópicos de forma unificada. Segundo Gomes (2012), Platão foi discípulo e admirador do grande filósofo grego *Sócrates* (469-399 a. C.), que ao contrário do seu discípulo, repudiava o pitagorismo e possuía profundas dúvidas metafísicas, que o impediram de se dedicar à matemática ou às ciências da natureza. Reis (2013) afirma que Platão foi o primeiro a demonstrar que existem apenas cinco poliedros regulares: o cubo, o tetraedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Ele e seus seguidores estudaram esses sólidos com tal intensidade, que eles se tornaram conhecidos como poliedros de Platão.

Figura 2.1 Elementos primordiais segundo Platão



Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Poliedro

Correia e Ferreira (2007) afirmam que, Platão defendia que, uma vez que o mundo só poderia ter sido feito a partir de corpos perfeitos, estes elementos deveriam ter a forma de sólidos regulares.

Na associação dos poliedros com os elementos da natureza Bortolossi afirma que,

> Os nomes sólidos platônicos ou corpos cósmicos foram dados devido a forma pela qual Platão (427 a.C.-34 a.C.), em um diálogo intitulado Timeu, os empregou para explicar a natureza. Não se sabe se Timeu realmente existiu ou se Platão o inventou como um personagem para desenvolver suas idéias. Em Timeu, Platão associa cada um dos elementos clássicos (terra, ar, água e fogo) com um poliedro regular. Terra é associada com o cubo, ar com o octaedro, água com o icosaedro e fogo com o tetraedro. Com relação ao quinto sólido platônico, o dodecaedro, Platão escreve: “Faltava ainda uma quinta construção que o deus utilizou para organizar todas as constelações do céu.”. Aristóteles introduziu um quinto elemento, éter, e postulou que os céus eram feitos deste elemento, mas ele não teve interesse em associá-lo com o quinto sólido de Platão.

A relação dos poliedros regulares com a natureza não se associa somente as ideias de Platão. Pesquisadores descobriram cristais nas formas de tetraedros, hexaedro e octaedro e esqueletos de animais marinhos na forma de icosaedro e dodecaedro. Por exemplo, são muitas as formas cristalinas naturais no formato do tetraedro (calcopirita), do hexaedro (galena) e do octaedro (magnetita).

Figura 2.2 Cristais na forma dos sólidos platônicos

(a) calcopirita | **(b) galena** | **(c) magnetita**

Fonte: Roger Weller apud Bortolossi/Cochise College

De acordo com Bortolossi, o sufixo *edro* vem da palavra grega *hédra*, que significa face. Os prefixos, também oriundos do grego, indicam a quantidade de faces da cada poliedro: *tetra* (4), *hexa* (6), *octa* (8), *dodeca* (12) e *icosa* (20). A palavra *cubo* vem do latim *cubu*, que significa estar deitado, estar estirado; repousar; estar deitado à mesa, e do grego *kýbos*. Um poliedro regular é chamado poliedro de Platão se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:

- Todas as faces têm o mesmo número de arestas;

- Todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número de arestas;
- Vale a relação de Euler, que relaciona a soma do número de vértices com o número de faces excedendo em duas unidades o número de arestas de um poliedro ($V + F = A + 2$).

Acredita-se que ao representar um pouco de história da matemática nas aulas, pode contribuir na aprendizagem dos estudantes, pois através dela podem conhecer o contexto histórico, os conflitos, além de conhecer uma cultura nova em um tempo completamente diferente. E talvez essa abordagem possa despertar neles a curiosidade, que pode ser imprescindível no seu desenvolvimento.

3 HISTÓRIA DO *ORIGAMI*

Segundo Gênova (2001), o papel surgiu na China de misturas de cascas de árvores, panos e redes de pesca no ano de 105 d.C pelo T'sai Lao. Essa mistura ficou em segredo por vários séculos pelo Império Chinês, pois a utilizava como mercadoria de exportação. O papel só chegou ao Japão pelos monges coreanos e um século depois espalhou-se por outras culturas, no continente europeu o papel chegou apenas no século XII. Nem sempre o papel teve boa qualidade exceto em suas civilizações de origem que já o utilizava em possíveis dobraduras, no restante do mundo o papel era grosso e frágil dificultando a prática de dobraduras, só a partir do século XIV conseguiram fabricar papeis mais finos e mais flexíveis, contudo a técnica de dobraduras não se disseminava devido ao seu alto custo.

De acordo com Barreto,

> Do século VII ao XII o Origami caracterizou-se por ser um divertimento daqueles que tinham o privilégio de ter o papel. Alguns modelos de Origami foram introduzidos em cerimônias religiosas e ficaram conhecidos por "Shinto", visto que o Xintoísmo é a religião oficial no Japão. Os guerreiros Samurai utilizavam Origamis em formato de leque, sustentados com faixas de carne seca para serem utilizados como enfeites nas trocas de presentes entre eles. Diplomas também eram dobrados utilizando técnicas de Origami como uma forma de autenticação do documento. Os diplomas, após abertos, somente voltariam à forma original se o recebedor conhecesse também o procedimento. Essa espécie de certificação ou garantia é chamada de "Origami Tsuki". (BARRETO, 2013, p.17).

No início da criação, o papel era de difícil acesso, sendo considerado um produto de luxo, utilizado apenas pelos nobres. Entre os séculos XVII e XIX o *origami* começou a se tornar mais popular, pelo fato do papel ter se tornado mais acessível e através disto, enfeites começaram ser confeccionados com a utilização do *origami*.

Segundo Buske (2007), *origami* é a tradicional arte japonesa de confeccionar figuras fazendo dobras no papel. Sua escrita é composta por dois caracteres japoneses: o primeiro deriva do desenho de uma mão e significa dobrar (ori), e o segundo deriva do desenho da seda e significa papel (kami). O mesmo pode ser utilizado de várias maneiras como um recurso para a exploração das propriedades geométricas das figuras planas e espaciais.

De acordo Pirola (2004), a sistematização das dobras e das bases permitiu ampliar a criatividade dos autores que não só criam peças, como também geram novas bases. Uma das figuras representativas do Origami é o Grou (Tsuru = Cegonha), que simboliza a eterna felicidade e é muito popular entre os japoneses. Barreto afirma que,

> No Japão todos os anos no dia 06 de agosto, desde 1958, milhares de trsurus são depositados no mausoléu erguido em homenagem aos que morreram na tragédia atômica de Hiroshima, durante a segunda guerra mundial, para que isso nunca volte a acontecer. E tudo isso teve seu início em função do desejo de paz e da vontade de viver da garota Sadako Sasaki, uma sobrevivente desta guerra. (BARRETO, 2013, p. 17-18).

A arte do *origami* se espalhou entre muitos povos, com culturas diferentes, onde as dobraduras começaram a possuir significados simbólicos, religiosos, místicos. Para Martins dos vários significados simbólicos na cultura oriental,

> **A tartaruga:** representa a longevidade. **O sapo:** propicia a fertilidade e o amor. **O tsuru:** é considerada a ave simbólica do origami, representa a felicidade, saúde e boa sorte. Os japoneses cultivam uma lenda que afirma que o tsuru, também chamado de grou ou cegonha por outras culturas, quando for produzido por uma mesma pessoa na quantidade de mil unidades, sendo que esta pessoa deve estar com o pensamento voltado para aquilo que espera alcançar, obterá ótimos resultados. (MARTINS, 2008, p. 31).

O *origami* geralmente é trabalhado a partir de folhas de papel quadradas, sem cortes, sem utilização de cola, somente é usada quando são realizadas dobraduras ligadas, ou seja, unindo faces de figuras ou no *origami* modular. Como toda arte que se desenvolve durante muito tempo, o *origami* apresenta novas técnicas e formas de dobrar, fazendo o uso de cortes e colagem. Neste sentido Higa (2012) apresenta os diversos tipos de *origami*, são eles,

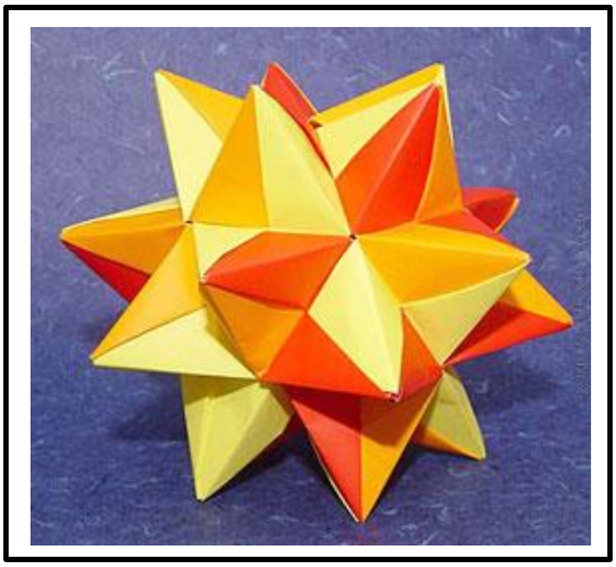
- **Tradicional:** O origami tradicional utiliza uma folha de papel, sem cortes e sem o uso de cola.

Figura 3.1- Origami Tradicional

Fonte: Tipos de Origami, 2012

- **Modular:** é construído a partir de vários pedaços. Assim, o origamista dobra pequenas peças para posteriormente encaixá-las formando o origami desejado.

Figura 3.2- Origami Modular



Fonte: Tipos de Origami, 2012

- **Kusudama:** é um enfeite em forma de uma bola geralmente com algum pingente ou franja de fios e, que ficam normalmente pendurados enfeitando o ambiente. Ele faz uso da técnica do origami modular. Nos seus primórdios, o origami kusudama estava associado com a cura e ervas medicinais, por causa disso, acabou ganhando este nome. *Kuso*, que significa remédio, e *dama*, que significa bola.

Figura 3.3- Kusudama

Fonte: Tipos de Origami, 2012

- **Block folding:** são dobradas centenas de módulos em forma de triângulos e a partir daí criar peças tridimensionais com esses módulos. Os block folding mais populares são o pavão e o cisne.

Figura 3.4- Block folding

Fonte: Tipos de Origami, 2012

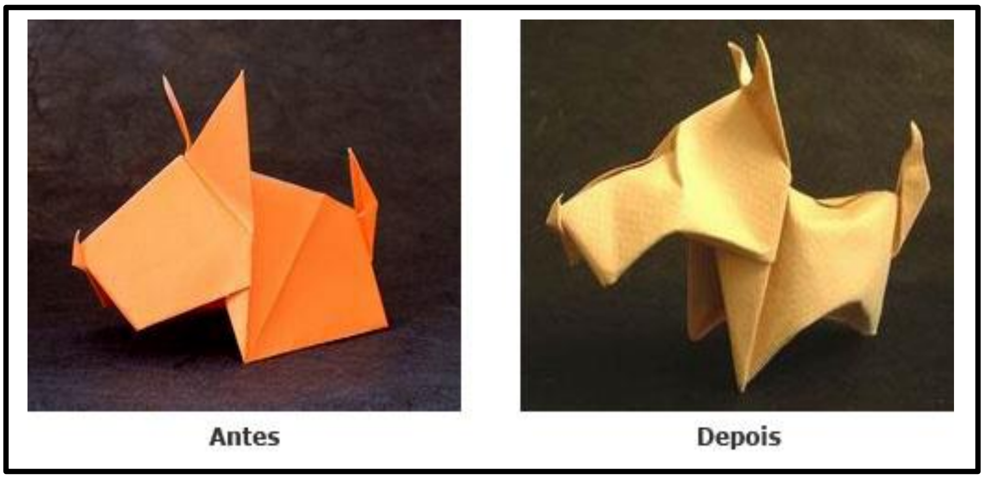
- **Origami Tesselation:** funciona por meio de uma grade de linhas bases, sendo essas grades figuras geométricas hexágonos, quadrados, triângulos, que formam figuras muito bonitas e interessantes em uma folha de papel. Basicamente, seria o mesmo que desenhar em um papel utilizando apenas dobras. Requer muita concentração e habilidade, esse tessellation da foto é o Star Puff.

Figura 3.5- Origami Tesselation

Fonte: Tipos de Origami, 2012

- **Wet Folding:** é uma técnica de fazer origami com o papel molhado. Consiste em passar uma esponja úmida ou borrifar água em um origami pronto para poder fazer curvas no papel e criar modelos mais vivos. Utiliza papéis grossos que são mais resistentes e aguentam diversas dobras quando úmidos.

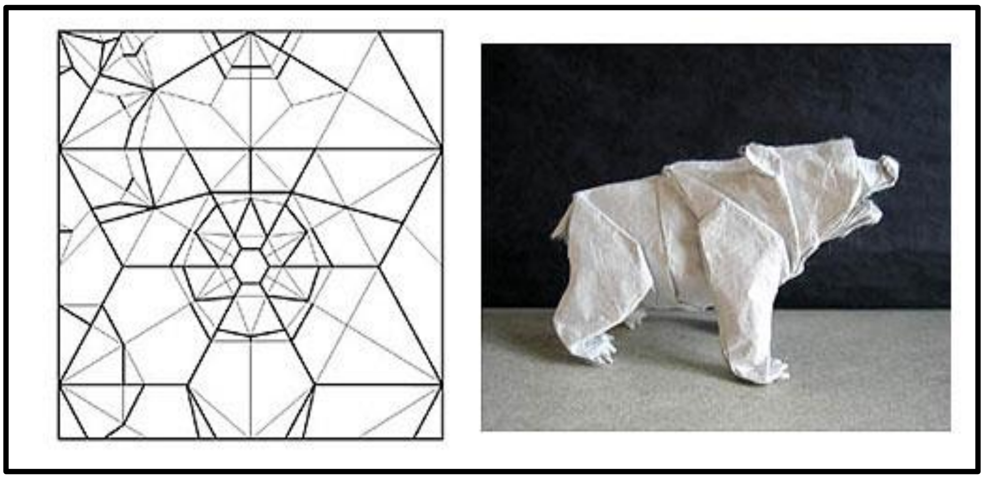
Figura 3.6- Wet Folding



Fonte: Tipos de Origami, 2012

- **Crease Pattern ou CP:** Imagine que depois de dobrar uma peça de origami você resolva desdobrar tudo para ver como ficou o papel. As marcas que você vai ver formam o CP. CP é a abreviatura e Crease Pattern, do inglês, significa "Padrão de Dobras" ou "Padrão de Vincos".

Figura 3.7- Crease Pattern ou CP



Fonte: Tipos de Origami, 2012

- **Kirigami:** Kirigami (*Kiri*=cortar + *kami*=papel) é uma variação do Origami, que em uma superfície de papel, ao receber cortes e dobras toma formas inesperadas. Esta arte, influenciada pelo Origami tradicional também é conhecida como POP-UP, 3D ou arquitetura em papel.

Figura 3.8- Kirigami

Fonte: Tipos de Origami, 2012

- **Paper Craft:** é um método de construção de objetos tridimensionais a partir de papel, semelhante ao origami. Contudo, distingue-se em que a construção geralmente é feita com vários pedaços de papel, e esses pedaços são cortados com tesoura e fixados uns aos outros com cola, em vez de se suportarem individualmente.

Figura 3.9- Paper Craft

Fonte: Tipos de Origami, 2012

- **Oribana:** é a junção de duas artes; a Ikebana, arte de arranjar as flores em estilo oriental e o Origami, a dobradura de papel. No Oribana tudo é confeccionado em papel: vasos, folhas e flores.

Figura 3.10- Oribana

Fonte: Tipos de Origami, 2012

Através de pesquisas os origamistas descobriram que na ação de dobrar o papel, além da atividade artesanal, criativa e artística ocorre um fenômeno de precisão matemática.

3.1 *ORIGAMI* NO ENSINO DE GEOMETRIA

A pesquisa realizada procurou desenvolver, com o uso do *origami,* alternativas para o ensino de Geometria em sala de aula. No *origami,* as construções são trabalhadas com materiais acessíveis de modo a proporcionar a manipulação, comparação e visualização de objetos geométricos. Segundo Rêgo, citado por Buske:

> Na realização das dobraduras, os estudantes familiarizam-se com formas geométricas, movimentos de transformação e múltiplas linhas de simetria dentro de uma mesma figura. Noções de retas perpendiculares, retas paralelas, figuras planas e sólidas, congruência, bissetrizes de ângulos, relações entre áreas e proporcionalidade poderão ser introduzidas de maneira igualmente eficaz. As dobraduras possibilitam ainda o desenvolvimento de atividades relacionadas ao estudo de frações, aritmética, álgebra e funções dentre outros. (RÊGO apud BUSKE, 2007, p. 28).

Segundo Rêgo, Rêgo e Gaudêncio, mencionado por Paiva e Bezerra (2004):

> O Origami pode representar para o processo de ensino/aprendizagem de Matemática um importante recurso metodológico, através do qual os alunos ampliarão os seus

> conhecimentos geométricos formais, adquiridos inicialmente de maneira informal por meio da observação do mundo, de objetos e formas que o cercam. Com uma atividade manual que integra, dentre outros campos do conhecimento, Geometria e Arte. (RÊGO; RÊGO; GAUDÊNCIO apud PAIVA; BEZERRA, 2009, p. 8).

O uso do origami possibilita ao professor de matemática trabalhar com materiais lúdicos, estabelecendo relações geométricas nas construções em sala de aula. Deste modo, a sala de aula torna-se um espaço propício para situações dinâmicas, interativas e significativas. É dever do professor avaliar se o uso do origami está sendo utilizado de acordo com os conteúdos estudados, não podendo o mesmo ser usado de forma excessiva ou sem objetividade.

De acordo com Smole, Diniz e Cândido:

> O trabalho com dobraduras nas aulas de matemática é muito importante, pois auxilia as crianças a desenvolverem a concentração, a atenção, a coordenação visuomotora e proporciona a aquisição de habilidades espaciais e geométricas, como memória e discriminação visual, percepção de igual e diferente, composição e decomposição de figuras, constância de forma e tamanho. (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2003, p. 64).

O uso do *origami* propicia aos estudantes verificar e construir formas, percebendo as propriedades existentes nas figuras. Como afirma Fuse, origamista japonesa, citada por Oliveira (2004), todo origami começa quando pomos as mãos em movimento. Há uma grande diferença entre conhecer alguma coisa através da mente e conhecer a mesma coisa através do tato.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997), é notável a necessidade da utilização de recursos tecnológicos e objetos concretos durante as aulas. De acordo com Ibraim e Barreto (2013), vários estudiosos como Gênova e Imenes relatam que o *origami* é um importante instrumento no processo de ensino e aprendizagem de Geometria. A construção de um objeto utilizando técnicas de origami representa para o aluno um dos poucos momentos na aula de Matemática em que se pode ver e tocar o objeto de estudo.

De acordo com Rodrigues e outros (2007): "Pode-se e deve-se ressaltar o fato de que através das dobraduras aproximam-se os conteúdos do educando, propiciando assim, um ambiente favorável para que o processo de ensino aprendizagem se desenvolva de maneira consistente." É necessário que os professores não sejam apenas transmissores de conhecimentos, mas sejam mediadores para que os estudantes se sintam motivados na busca pelas soluções dos problemas.

Investigações destacam que a utilização do *origami* no processo de ensino possibilita o desenvolvimento de habilidades, como afirma Drumont mencionado por Martins (2009):

- **Comportamental:** através de movimentos repetitivos, o aprendiz deve observar e ouvir com atenção as instruções do facilitador, e executá-las com qualidade e carinho, sendo que o sucesso do trabalho depende muito do executor, mostrando a importância do autocontrole no trabalho, desenvolvendo o pensamento intuitivo.
- **Trabalho em Equipe:** o ato de dobrar um quadrado ou retângulo de papel, transformando-o numa figura tridimensional é um exercício importante para movimentar o raciocínio espacial e obter a simetria. Observando o trabalho do outro e ajudar o colega nas dobras é auxiliar na importância do trabalho em equipe.

De acordo com os PCN's:

> A atividade matemática não é olhar para coisas prontas e definitivas, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade. (...). O conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem (BRASIL, Matemática, 1997, p. 19).

Sendo assim, o ensino da Geometria através do *origami* possibilita uma melhora na aprendizagem geométrica. Neste sentido, Rancan afirma:

> A utilização de materiais diversificados que demonstram visualmente a aplicabilidade dos teoremas que fazem parte dos conteúdos geométricos faz com que haja o favorecimento da participação plena, bem como estimula o senso exploratório dos estudantes, componente relevante ao seu aprendizado. (RANCAN, 2011, p. 2).

Deste modo, o manuseio de materiais como o *origami* faz com que a geometria se torne um conteúdo relevante, onde os estudantes passam a ser levados à descoberta e à busca de resoluções de problemas. De acordo com Rêgo citado por Pirola, na Matemática, o uso do Origami permite o desenvolvimento de atividades voltadas para:

- **A construção de conceitos**: as dobraduras, por mais simples que pareçam, envolvem elementos que podem ser explorados na construção de conceitos matemáticos diversos, não apenas geométricos;
- **A discriminação de forma, posição e tamanho:** uma simples dobra em um quadrado de papel realiza transformações de forma, posição ou tamanho de uma figura, estimulando o desenvolvimento do pensamento geométrico, aritmético e algébrico;
- **A leitura e interpretação de diagramas:** constituindo uma linguagem simbólica completa e diferenciada de outras linguagens usadas para a comunicação de ideias, a linguagem do Origami é universal, sua interpretação facilita o uso de qualquer livro de

dobraduras e dispensa a preocupação com a memorização de passos, além de introduzir a técnica do desenho em sala de aula;

- **A construção de figuras planas e espaciais:** a riqueza de possibilidades de construção de formas sejam geométricas ou não, planas ou espaciais, fazem do Origami uma arte que pode ser explorada das mais diversas formas;
- **O uso dos termos geométricos em um contexto:** a descrição oral dos passos de uma dobradura, tradição mantida por séculos por artistas do oriente, é facilitada quando quem o faz conhece os elementos geométricos, sua definição e nomenclatura, presentes em cada passo. O uso dos termos geométricos corretos, em um contexto, estimula a aprendizagem; o desenvolvimento da percepção e discriminação de relações planas e espaciais: essenciais na construção de conceitos e na resolução de inúmeros problemas matemáticos, a percepção geométrica plana e espacial, bem como a capacidade de estabelecer relações entre elementos geométricos pianos e espaciais, têm seu desenvolvimento estimulado com a prática das dobraduras. Ações como observar, compor, decompor, transformar, representar e comunicar são facilitadas com o desenvolvimento de atividades geométricas envolvendo o Origami;
- **A exploração de padrões geométricos:** a capacidade de perceber a presença de padrões sejam numéricos ou geométricos, facilita a aplicação de conceitos matemáticos a outros campos de conhecimento;
- **O desenvolvimento do raciocínio do tipo passo-a-passo:** cada dobradura envolve um processo de sequenciamento de etapas, constituindo um modo de pensar que é muito utilizado na resolução de problemas matemáticos diversos;
- **O desenvolvimento do senso de localização espacial:** através da exploração dos elementos de linguagem relativos à posição no espaço, como "cima", "baixo", "esquerda", "direita", etc.

Dessa forma o uso do *origami* auxilia no estudo da geometria, através de atividades estimulando nos estudantes a exploração, representação, comunicação e raciocínio matemático. Andrade afirma,

> O origami visa minimizar dificuldades existentes no estudo da geometria a partir de atividades ricas em exploração, aplicação, representação, comunicação e raciocínio matemático. Essas atividades acabam por possibilitar aos alunos novas descobertas e um melhor entendimento dos conceitos geométricos. Dessa forma os alunos desenvolvem suas habilidades e criatividade, pois estão motivados pela ludicidade da construção das dobras a fim de alcançar uma forma final, podendo ser esta figurativa ou geométrica. (ANDRADE, 2008, p.30)

Rancan e Giraffa (2012) afirmam que, a Matemática é essencialmente bonita, e o origami nos mostra algo dessa beleza, numa maravilhosa relação entre Ciência e Arte. De uma ou mais folhas simples de papel, emerge um universo de forma. Isto é, através do *origami* no ensino e aprendizagem de geometria, os estudantes visualizam os conteúdos geométricos nas dobraduras realizadas. Proporcionando um aprendizado em geometria de forma animada, criativa e incentivadora.

Trabalhar com recursos didáticos no âmbito educacional que visam melhorar a dinâmica em sala de aula e a utilização de novos métodos de ensino, constitui-se como um importante recurso para uma significativa aprendizagem. As dobraduras em papel, por mais simples que pareçam, permitem a construção e exploração de vários conceitos e elementos. A dobra de um quadrado feito no papel apresenta transformações de forma, posição e até mesmo tamanho de uma figura, estimulando assim, o desenvolvimento do pensamento em geometria. Nessa perspectiva de trabalho, a arte do *origami* pode ser considerada como um recurso de ensino e aprendizagem que ultrapassa as dobras e recortes de papéis.

4 A TEORIA DE VAN HIELE PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO EM GEOMETRIA

Buscando verificar que conhecimento geométrico os estudantes possuem em sua trajetória estudantil, esta pesquisa esteve fundamentada na proposta de van Hiele (1986) que deu origem a "Teoria do Desenvolvimento do Pensamento Geométrico". A teoria de van Hiele consiste num modelo de aprendizagem que descreve o nível do pensamento dos estudantes em geometria ao evoluírem de uma simples percepção de formas até compreensão de provas e demonstrações. Esta teoria baseia-se em uma relação entre o desenvolvimento mental e cognitivo dos estudantes e nas experiências educacionais vivenciadas por eles.

Segundo Crowley (1994), o modelo de van Hiele de pensamento geométrico emergiu dos trabalhos de doutoramento de Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele, finalizados simultaneamente na Universidade de Utrecht. De acordo com os van Hiele essa teoria surgiu de suas frustações no processo de ensino e aprendizagem de geometria. Afirmam ainda, que os estudantes apresentavam uma dificuldade enorme em aprender geometria, ele dizia que parecia estar falando outra língua. Mesmo procurando formas diferente de ensinar os conteúdos de geometria as dificuldades persistiam, van Hiele mencionado Oliveira afirma,

> Quando comecei a minha carreira como professo de matemática, logo me dei conta de como era difícil essa profissão. Havia partes do conteúdo que eu podia explicar e explicar e, ainda assim os alunos não entendiam. Eu podia ver que eles realmente tentavam, mas não obtinha sucesso. Especialmente, no começo da geometria, quando coisas simples tinha que ser provadas, eu podia ver que eles se esforçavam ao máximo mas o assunto parecia ser muito difícil. (VAN HIELE *apud* OLIVEIRA, 2012, p. 47).

Para Nasser e Sant'anna (2010), a ideia central da teoria é que os alunos progridem segundo uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, enquanto eles aprendem geometria. Assim, os estudantes só passam para outro nível quando dominam o nível anterior, cabe ao professor selecionar atividades que favoreça a aprendizagem dos conteúdos. Neste sentido, o progresso dos estudantes segundo a teoria de van Hiele depende mais da seleção das atividades, do que idade ou maturação dos estudantes. Ferreira (2013) aponta alguns aspectos importantes da teoria são eles,

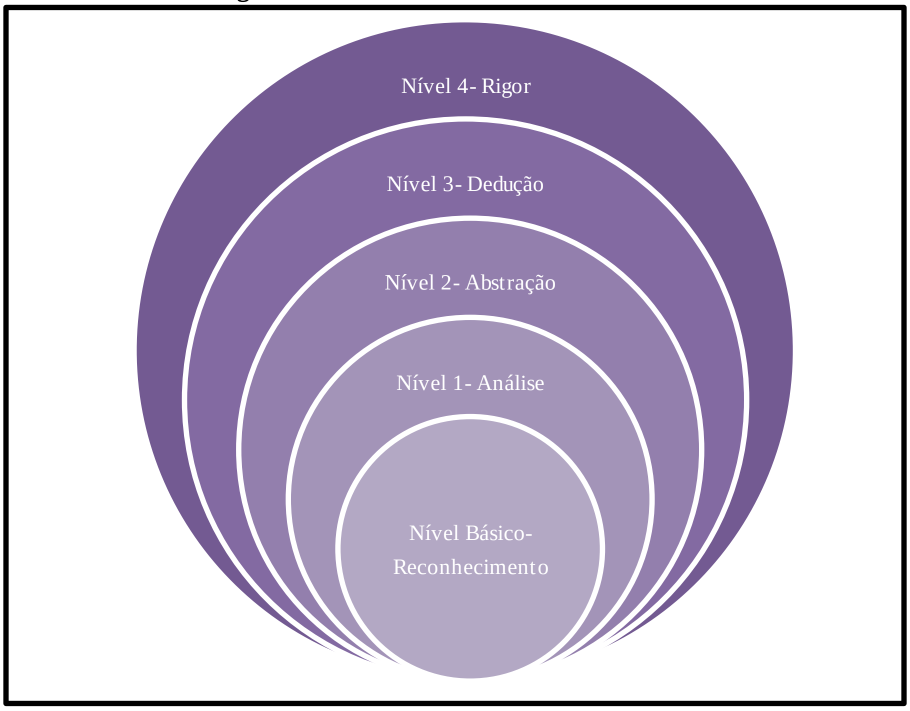
- Assuntos implícitos num nível tornam-se explícitos no próximo;
- Cada nível possui uma linguagem própria, sendo que cada símbolo possui um respectivo significado;

- Caso haja uma combinação inadequada entre o professor, o material e o aluno, a aprendizagem não será efetivada; ou seja, não há compreensão entre indivíduos de diferentes níveis.

4.1 OS NÍVEIS DA TEORIA DE VAN HIELE

A teoria de van Hiele estabelece cinco níveis hierárquicos, no sentido de que o estudante só atinge determinado nível de raciocínio após dominar os níveis anteriores. São eles: **Nível Básico (Reconhecimento), Nível 1 (Análise), Nível 2 (Abstração), Nível 3 (Dedução), Nível 4 (Rigor)**. O esquema seguinte (Figura 4.1) representa os níveis de aprendizagem de van Hiele de acordo com a sequência proposta pelo casal.

Figura 4.1- Os níveis da teoria de van Hiele



Fonte: Crowley

Crowley (1994), afirma que os níveis descrevem características do processo do pensamento, assim, os níveis serão descritos em termos gerais como se segue:

- **Nível Básico (Reconhecimento):** neste nível inicial, os alunos percebem o espaço apenas como algo que existe em torno deles. Os conceitos de geometria são vistos como entidades totais, e não como entidades que têm componentes ou atributos. As figuras geométricas são reconhecidas por sua forma como um todo, isto é, por sua aparência física, não por suas partes ou propriedades. Ex.: O aluno identifica a figura de um quadrado e ao ser perguntado por que, a resposta é do tipo: “porque se parece com um quadrado”. Alguém neste nível, contudo, não reconheceria que as figuras têm ângulos retos e que os lados opostos são paralelos.

- **Nível 1 (Análise):** no nível 1, começa uma análise dos conceitos geométricos. Através da observação e da experimentação, os alunos começam a discernir as características das figuras. Surgem então propriedades que são utilizadas para conceituar classes de configurações. Assim, reconhece-se que as figuras têm partes, e as figuras são reconhecidas por suas partes. Ex.: o aluno sabe que o quadrado tem quatro lados iguais e quatro ângulos retos. Todavia, os alunos deste nível ainda não são capazes de explicar as relações entre propriedades, não vêem inter-relações entre figuras e não entendem definições.
- **Nível 2 (Abstração):** neste nível os alunos conseguem estabelecer inter-relações de propriedades tanto dentro de figuras(percebe que num quadrilátero, se os lados opostos são paralelos, necessariamente os ângulos opostos são iguais) quanto entre figuras (um quadrado é um retângulo porque tem todas as propriedades de um retângulo). Assim, eles são capazes de deduzir propriedades de uma figura e reconhecer a classes de figuras. Ex.: o aluno sabe que todo o quadrado é um retângulo, e que todo retângulo é um paralelogramo. Neste nível, porém, não compreendem o significado da dedução como um todo ou o papel dos axiomas. Os alunos são capazes de acompanhar demonstrações formais, mas não vêem como se pode alterar a ordem lógica nem como se pode construir uma prova partindo de premissas diferentes ou não familiares.
- **Nível 3 (Dedução):** neste nível compreende-se o significado da dedução como uma maneira de estabelecer a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático. São percebidos a inter-relação e o papel de termos não definidos, axiomas, postulados, definições, teoremas e demonstrações. Ex.: o aluno entende por que o postulado das paralelas implica que a soma dos ângulos de um triângulo seja de 180°. Neste nível, a pessoa é capaz de construir demonstrações, e não apenas de memoriza-las; enxerga a possibilidade de desenvolver uma demonstração de mais de uma maneira.
- **Nível 4 (Rigor):** neste nível, o aluno é capaz de trabalhar vários sistemas axiomáticos, isto é, podem-se estudar geometrias não euclidianas comparar sistemas diferentes. A geometria é vista no plano abstrato.

Em suas pesquisas, os van Hiele dirigiram o trabalho voltado aos três primeiros níveis, pois suas aplicações eram destinadas as escola secundárias com enfoque na Geometria Plana. Poucas são as pesquisas referentes aos outros níveis mais avançados.

4.2 AS FASES DE APRENDIZAGEM

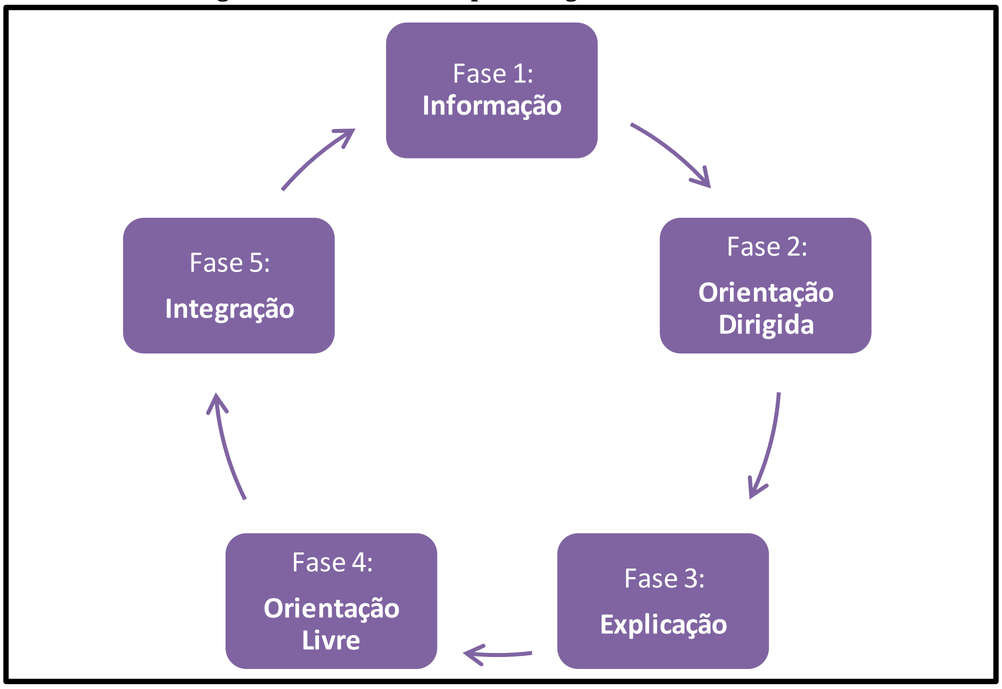
Elaborar cuidadosamente uma sequência de atividades que possibilite ao estudante avançar de um nível para o nível seguinte para a aprendizagem de conceitos geométricos é o principal papel do professor na teoria de van Hiele. Para que um estudante possa progredir de um nível para o nível seguinte, é preciso que ele passe por cinco fases de aprendizagem. São elas: informação, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração.

Segue uma breve descrição de cada fase de aprendizagem segundo Nasser e San't anna (2010):

- **Fase 1 (Informação):** Nesta etapa é abordado o objeto de estudo, onde o principal objetivo é rever e suscitar os conhecimentos apresentados pelos estudantes referentes a Geometria. Nesta fase é importante fazer uso de perguntas como "O que é um polígono?", "quais são as características de um polígono regular?", entre outras.
- **Fase 2 (Orientação Dirigida):** Os estudantes exploram os tópicos de estudo através de atividades que o professor selecionou e organizou cuidadosamente. Esta fase é composta por pequenas tarefas a serem realizadas pelos estudantes, de forma progressiva e efetiva, pois é a partir dessas atividades que esse estudante poderá evoluir para o nível seguinte.
- **Fase 3 (Explicação):** Na fase de explicação, os estudantes expressam e modificam seus pontos de vista sobre as estruturas que foram observadas. O professor estimula seus estudantes a expressarem suas descobertas, expondo e dialogando suas visões. É durante esta fase que começa torna-se evidente o sistema das relações dos níveis.
- **Fase 4 (Orientação Livre):** Os estudantes procuram soluções próprias para as tarefas mais complicadas. Nesta fase os estudantes se deparam com atividades complexas, que possuem diferentes formas de serem realizadas.
- **Fase 5 (Integração):** O estudante revê e resume o que aprendeu, formando uma visão geral do sistema de objetos e relações do nível atingido.

A sequência das fases de aprendizagem da teoria de Van Hiele pode ser representada de acordo com a figura 4.2:

Figura 4.2- As fases de aprendizagem da teoria de van Hiele



Fonte: Crowley

Além de apontar o nível de raciocínio dos estudantes em cada nível e de formular as fases da aprendizagem, os van Hiele ainda apresentou algumas propriedades do modelo. De acordo com Crowley (1994), o modelo de van Hiele é:

- **Sequencial:** como na maioria das teorias desenvolvimentistas, uma pessoa deve necessariamente passar pelos vários níveis, sucessivamente. Para se sair bem num determinado nível, o aluno deve ter assimilado as estratégias dos níveis precedentes.
- **Avanço:** a progressão (ou não) de um nível para outro depende mais do conteúdo e dos métodos de instrução do que da idade. Nenhum método de ensino permite ao aluno pular um nível; alguns métodos acentuam o progresso, ao passo que outros o retardam ou até impedem a passagem de um nível a outro.
- **Intrínseco e extrínseco:** os objetos inerentes a um nível tornaram-se os objetos de ensino no nível seguinte. Por exemplo, no nível básico apenas a forma da figura é percebida. A figura é, obviamente, determinada por suas propriedades, mas só no nível 1 a figura é analisada e seus componentes e propriedades são descobertos.

- **Linguística:** cada nível tem seus próprios símbolos linguísticos seus próprios sistemas de relações que ligam esses símbolos. Assim, uma relação que é correta num certo nível pode ser modificada em outro. Por exemplo, uma figura pode ter mais do que um nome (inclusão de classes)- um quadrado também é um retângulo (e um paralelogramo). Um aluno do nível 1 não concebe que esse tipo de acomodação possa ocorrer. Porém, esse tipo de noção e a linguagem que o acompanha são fundamentais no nível 2.
- **Combinação inadequada:** se o aluno esta num certo nível e o curso num nível diferente, o aprendizado e o progresso desejado podem não se verificar. Em particular, se o professor, material didático, conteúdo, vocabulário, e assim por diante, estiverem num nível mais alto que o aluno, este não será capaz de acompanhar os processos de pensamento. Que estarão sendo empregados.

4.3 TESTE DE VAN HIELE

Como saber em qual nível de raciocínio em Geometria um estudante se encontra? A melhor maneira de identificar o nível de raciocínio de um estudante em Geometria é propor atividades que o leve a raciocinar, e observar como ele raciocinou para respondê-la, isso segundo a Teoria de van Hiele. Contudo, isso não é uma tarefa fácil de fazer principalmente em turmas grandes e tampouco em aulas de Geometria insuficientes. Uma saída então como afirma Nasser e Sant'anna (2010) seria aplicar testes elaborados por pesquisadores e estudiosos, com o intuito de avaliar o desempenho das atividades em cada nível.

A maioria das questões que compõem o teste de van Hiele é de múltipla escolha, na verdade alguns casos não dizem claramente em qual nível aquele estudante está, mas, em geral, sugerem que 90% de uma amostra estão em seus determinados níveis de aprendizagem.

A teoria de van Hiele julga que um estudante só atingirá um nível de desenvolvimento em Geometria se dominar o nível precedente, porém, isso às vezes não acontece. Segundo Nasser e Sant'anna (2010) é o caso do estudante que conhece as propriedades de algumas figuras geométricas (Nível de Análise), mas não consegue reconhecer todas as figuras (Nível de Reconhecimento). Afirmam ainda, que isso deve-se as falhas que esses estudantes tiveram na construção dos conceitos geométricos durante sua trajetória escolar, ressaltam que atividades bem elaboradas e aulas planejadas pode reverter essa situação.

O teste utilizado nessa pesquisa com objetivo de verificar em qual nível de raciocínio em Geometria se encontrava os sujeitos da pesquisa foi adaptado por Nasser e Sant'anna, contendo apenas os três (3) primeiros níveis da teoria e composto por quinze (15) questões, onde cada nível apresenta cinco (5) questões, sendo essas questões abertas e fechadas.

Considera-se que o estudante tenha alcançado determinado nível se ele acerta pelo menos 60 % das questões em cada nível, ou seja, três (3) das cinco (5) questões.

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo são descritos os procedimentos metodológicos, bem como as características dos sujeitos da pesquisa, os instrumentos utilizados na pesquisa e a análise dos dados. Os poliedros de Platão construídos através do *origami* aliado à teoria de Van Hiele surgiram com a preocupação de verificar as relações existentes entre *origami* e a geometria, investigando se existia um elo entre o *origami* e o ensino de Geometria. Utilizou-se o *origami* como uma ferramenta metodológica e a teoria de van Hiele para verificar o nível do desenvolvimento do pensamento geométrico dos sujeitos da pesquisa.

5.1 OS SUJEITOS DA PESQUISA

A presente pesquisa foi implementada em uma escola da rede estadual de ensino, a Escola Estadual "Major Lermino Pimenta" localizada no distrito de Nelson de Sena, município de São João Evangelista, MG.

Os sujeitos da pesquisa são estudantes da 3ª série do Ensino Médio, tendo a turma quatro (4) aulas semanais, ministradas no turno da tarde. A turma era composta por 14 estudantes, com a faixa etária variando de 17 a 19 anos. Quanto ao sexo o número de meninas supera o de meninos.

A proposta foi apresentada à direção da escola, que permitiu a realização da pesquisa com seus estudantes. Os pais foram informados por escrito, através do termo de compromisso e autorização da pesquisa, a respeito da pesquisa a ser desenvolvida. Todos os estudantes foram previamente esclarecidos sobre como seria a pesquisa, foi apresentado a eles as datas, horários, objetivos e os procedimentos metodológicos.

5.1.1 Instrumentos Utilizados na Pesquisa

O teste de van Hiele, foi utilizado nessa pesquisa com objetivo de verificar em qual nível de raciocínio em Geometria se encontravam os sujeitos da pesquisa. O teste foi adaptado por Nasser e Sant'anna (2010).

Outro instrumento utilizado foi o *origami* na construção dos poliedros de Platão que teve como auxílio uma cartilha elaborada pelos pesquisadores para suporte durante as aulas ministradas e para os estudantes foi elaborada uma folha do estudante.

Finalmente, foi aplicado um pós - teste, para verificar se o *origami* se constituiu de uma possível ferramenta metodológica aliada à Teoria de van Hiele no processo de ensino e aprendizagem de geometria.

5.2 ATIVIDADES DESENVOLVIDAS – DESCRIÇÃO

A realização pesquisa teve a duração de sete (7) semanas, com o total de dez (10) encontros de duas (2) horas semanais, durante os meses de setembro e outubro 2014. A aplicação da pesquisa será descrita através dos encontros realizados.

1º Encontro

No primeiro encontro com a turma de implementação da pesquisa foi realizado uma dinâmica de interação entre os pesquisadores e os estudantes que consistia em passar entre eles uma caixa que dentro possuía qualidades e características, assim, os estudantes iriam retirando um de cada vez um papel e entregando a caixa para a pessoa que ele achava que possuía aquela determinada característica. No fim a caixa passaria por todos os estudantes, mas somente o último ficaria com ela. Contudo, quando o estudante abrisse a caixa encontraria um *tsuru* que é considerada a ave simbólica do origami, representa a felicidade, saúde e boa sorte. Após solicitou-se que ele desmontasse cuidadosamente o *tsuru*, encontrando a seguinte mensagem para ser lida para turma inteira:

"Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer."

Albert Einstein

2º Encontro

Na segunda aula, para verificar o conhecimento geométrico dos estudantes trazidos em sua trajetória escolar, foi aplicado o Teste de van Hiele (Anexo A). Através das respostas analisadas foi possível direcionar e realizar algumas modificações no decorrer da pesquisa.

3º e 4º Encontros

Nestes encontros ministrou-se uma aula sobre Polígonos e Quadriláteros. Foi realizada uma atividade (apêndice B), para classificar os quadriláteros. Durante a segunda aula realizou-se outra atividade denominada Quem eu sou? (Anexo B), retirada do caderno de atividades de Amâncio (2013), cujo objetivo era que os estudantes identificassem quadriláteros a partir de propriedades específicas.

5º Encontro

Neste encontro começaram a ser trabalhadas as dobraduras, sendo levado para os estudantes uma material denominado Folha do Estudante I (Apêndice C), contendo atividades sobre a Construção de polígonos regulares com *origami*.

6º, 7º e 8º Encontros

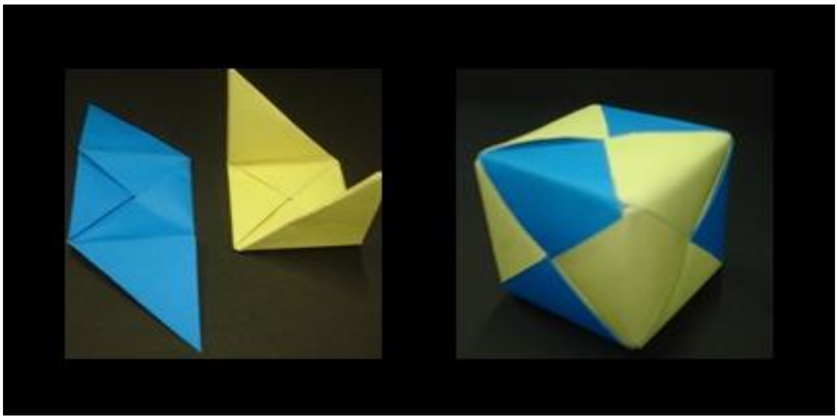
Aconteceu a construção dos poliedros de Platão através do *origami*. Foram distribuídas a II Folha do Estudante (Apêndice D) com o passo a passo das construções dos poliedros de Platão. Foi trabalhado com os estudantes conceitos sobre poliedros regulares, poliedros convexos, poliedros não- convexos, teorema de Euler e os poliedros de Platão na natureza.

Etapas das construções

No primeiro momento aconteceu a apresentação dos Axiomas de Dobradura (Apêndice E- Cartilha para o professor).

O primeiro poliedro construído foi o Hexaedro, figura formada por 12 arestas, 8 vértices e 6 faces no formato quadrangular (o hexaedro também pode ser denominado de cubo). Para construção do mesmo através do origami são necessários 6 módulos idênticos. Na figura 5. 1 são apresentados uma foto do módulo e do cubo pronto.

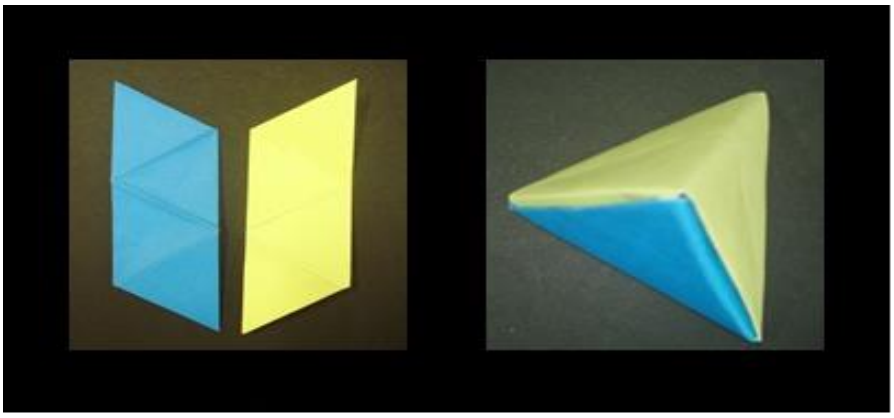
Figura 5.1- Hexaedro



Fonte: Arquivo Pessoal

Após a construção do Hexaedro, partiu-se para a elaboração dos poliedros de faces triangulares: o tetraedro, o octaedro e o icosaedro. O tetraedro regular é um sólido platônico, figura geométrica espacial formada por quatro triângulos equiláteros; possui 4 vértices , 4 faces e 6 arestas. E para sua construção através do origami são necessários 2 módulos, denominados módulo A e B. Na figura 5.2 são apresentados uma foto do módulo e do tetraedro pronto.

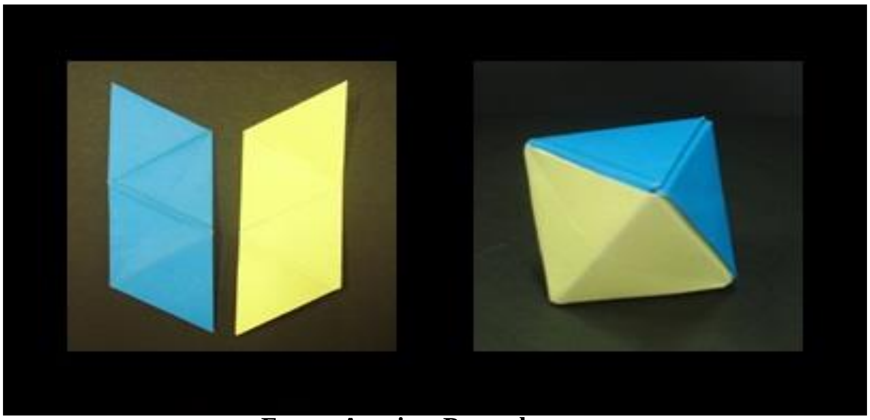
Figura 5.2- Tetraedro



Fonte: Arquivo Pessoal

O octaedro é formado por 12 arestas, 6 vértices e 8 faces que possuem o formato de um triângulo equilátero. Para seu encaixe são utilizados os seguintes módulos: 2A+2B, 4A ou 4 B. Na figura 5.3, são apresentadas foto dos módulos e do octaedro pronto.

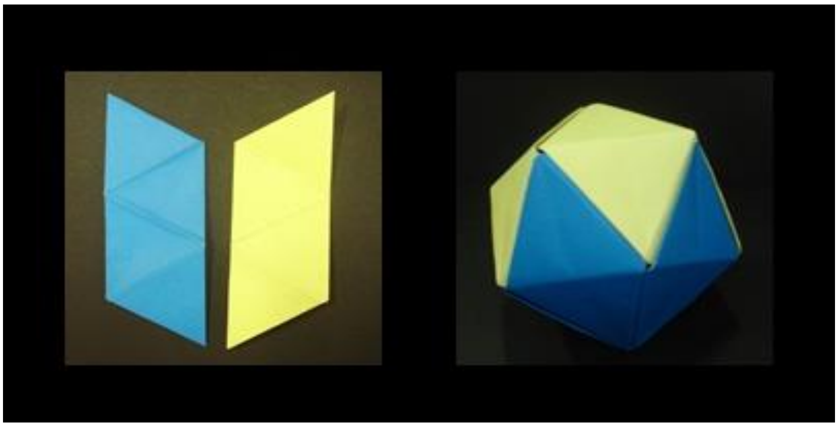
Figura 5.3- Octaedro



Fonte: Arquivo Pessoal

O icosaedro é um sólido formado por 30 arestas, 12 vértices e 20 faces no formato de um triângulo equilátero. Na sua elaboração são usados um total de 10 módulos: 5A + 5B. A figura 5.4 ilustra os módulos citados e o icosaedro pronto.

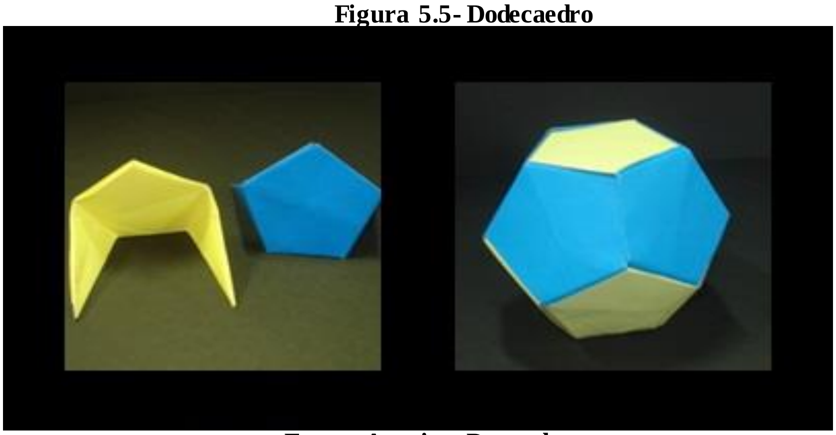
Figura 5.4- Icosaedro



Fonte: Arquivo Pessoal

Dos sólidos Platônicos, o dodecaedro é constituído por doze pentágonos e não se divide em outros poliedros regulares. Possui 30 arestas, 20 vértices e 12 faces pentagonais. Para sua montagem são necessários 12 módulos de faces pentagonais. Na figura 5.5 são apresentados o módulo pentagonal e o dodecaedro pronto.

Figura 5.5- Dodecaedro



Fonte: Arquivo Pessoal

9º Encontro

Foi aplicado o teste de Sondagem (Apêndice F) para verificar se o *origami* se constitui como um recurso didático no processo de ensino e aprendizagem de Geometria.

10º Encontro

Destacamos que todas as construções dos poliedros de Platão, passo a passo tanto da cartilha do professor e da folha dos estudantes foram retidas do livro "Explorando Geometria com Origami" do PIC- OBMEP 2012. Este encontro foi para a divulgação dos resultados da pesquisa aos estudantes, pelo interesse deles para saber em qual nível cada um se encontrava.

Foi aproveitado o encontro para agradecer a colaboração e participação de todos durante o tempo que estivemos juntos.

5.3 ANÁLISE DOS DADOS

Análise do teste de van Hiele adaptado por Nasser e Sant'anna

Como foi relatado no capítulo 4, na seção 4.3 Teste de van Hiele, o teste foi composto por 15 questões, envolvendo somente os 3 primeiros níveis, contendo 5 questões de cada nível, as questões eram abertas e fechadas. Foi feita a correção das questões, utilizando o critério de certo e errado, onde as questões incompletas ou em branco foram consideradas erradas. Optamos por esse tipo de correção para verificar os conhecimentos dos estudantes em geometria.

Para cada nível (Básico, nível 1 e nível 2) verificamos que os estudantes haviam acertado completamente uma, duas, três, quatro, cinco e até mesmo nenhuma. Os resultados são apresentados na tabela abaixo:

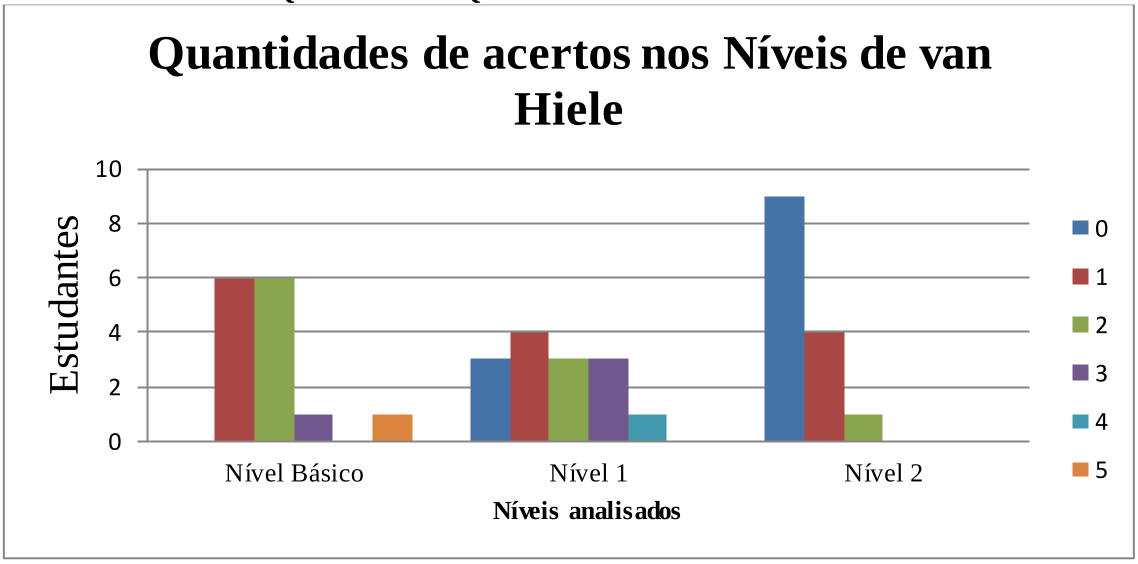
Tabela 5.1 Quantidades de Questões Certas no Teste de van Hiele

Quantidades de Questões Certas / Níveis de van Hiele	0	1	2	3	4	5
Nível Básico	-	6	6	1	-	1
Nível 1	3	4	3	3	1	-
Nível 2	9	4	1	-	-	-

Fonte: Dados da pesquisa

No gráfico 5.1 estão representadas as quantidades de acertos em cada nível do teste de van Hiele.

Gráfico 5.1 Quantidades de Questões Certas no teste de van Hiele



Fonte: Dados da pesquisa

A leitura da tabela ou do gráfico mostra que no nível básico todos os estudantes acertaram pelo menos uma questão e um dos estudantes acertou corretamente todas as questões deste nível.

Analisando o nível 1, todos os estudantes acertaram de 1 a 4 questões, por outro lado 2 ou 3 estudantes acertaram mais questões relativas ao nível 1 do que as que fizeram do nível básico.

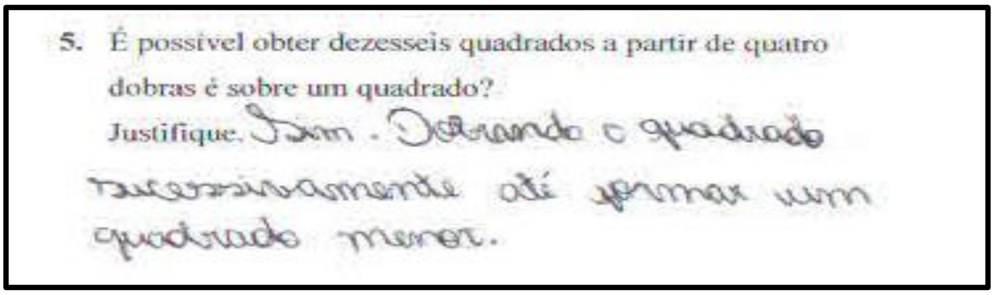
Quando se evidenciou os dados do nível 2, verificou-se que 9 estudantes não conseguiram responder corretamente nenhuma das 5 questões. E nenhum estudante respondeu corretamente todas as questões do nível, somente 4 estudantes acertaram uma questão e 1 estudante acertou duas questões.

Após a análise do teste de van Hiele, percebemos que alguns estudantes não estariam classificados dentro da teoria, pelo fato de não terem acertados corretamente 3 questões no nível básico. Contudo, alguns desses estudantes se destacaram no nível 1. Para que estes estudantes estivessem dentro da teoria seria necessário um trabalho com atividades que fizesse os estudantes passar pelo nível anterior não dominado, para assim, prosseguir para o seguinte.

Depois da análise completa do teste, decidiu-se rever alguns conceitos sobre o reconhecimento de figuras que foi uma das maiores dificuldades apresentadas nas questões do nível Básico, para só depois começar as construções dos poliedros de Platão através do *origami*.

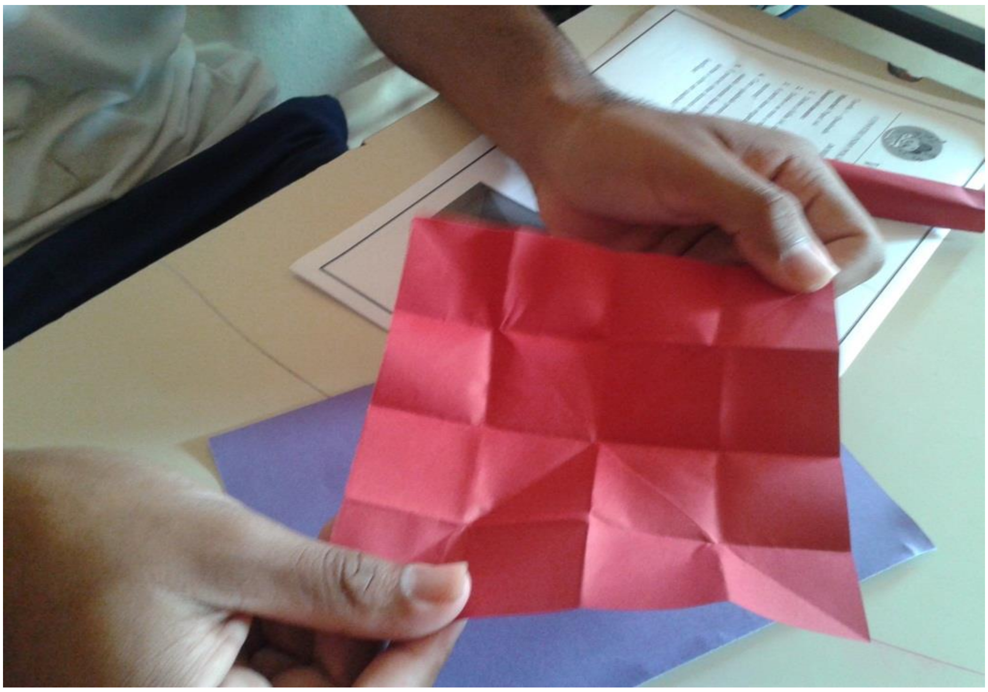
Descreveremos o **5º Encontro** com estudantes por ser uma atividade com a utilização do *origami*. Neste encontro foi desenvolvido dobraduras que se identificam pelas faces das dos poliedros de Platão. Foi entregue uma folha do estudante que continha três tarefas, na primeira era a construção de um quadrado. A partir da dobradura do quadrado, foram trabalhado os eixos de simetria deste e algumas atividades que instigavam os estudantes nas resoluções das mesmas, como os exemplos abaixo especificados:

Figura 5.6- Resposta estudante A


5. É possível obter dezesseis quadrados a partir de quatro dobras é sobre um quadrado?
Justifique. Sim. Dobrando o quadrado sucessivamente até formar um quadrado menor.

Fonte: Arquivo Pessoal

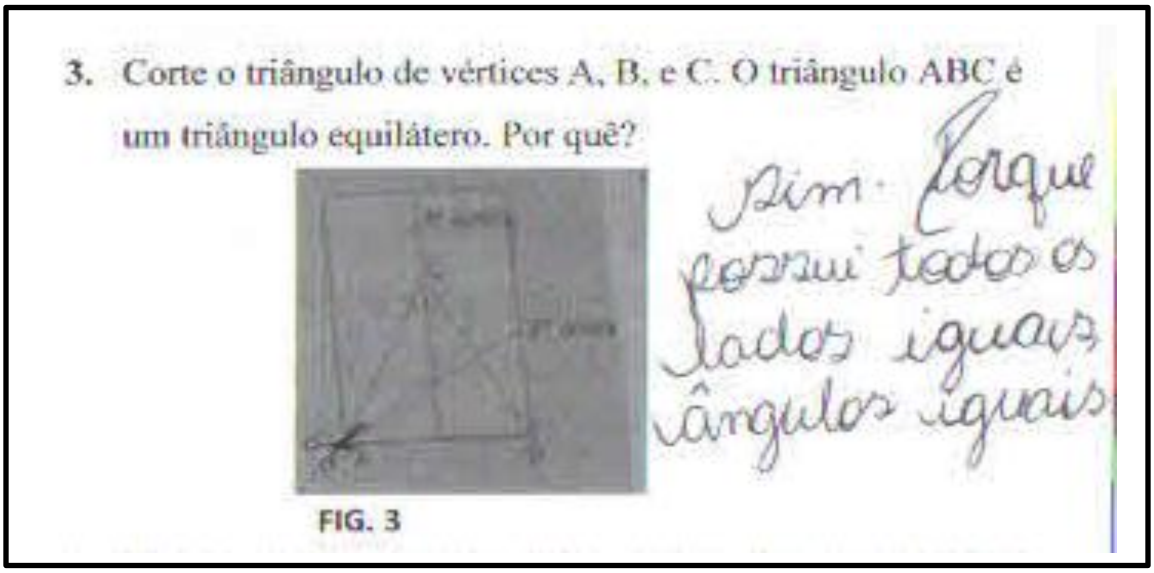
Figura 5.7- Resposta estudante B



Fonte: Arquivo Pessoal

Na tarefa 2, assim como na anterior, foi solicitado a construção de um triângulo equilátero com uso de dobradura. A partir deste triângulo foi pedido que resolvessem algumas questões referentes a ele. Foram obtidas as respostas abaixo,

Figura 5.8- Resposta estudante A



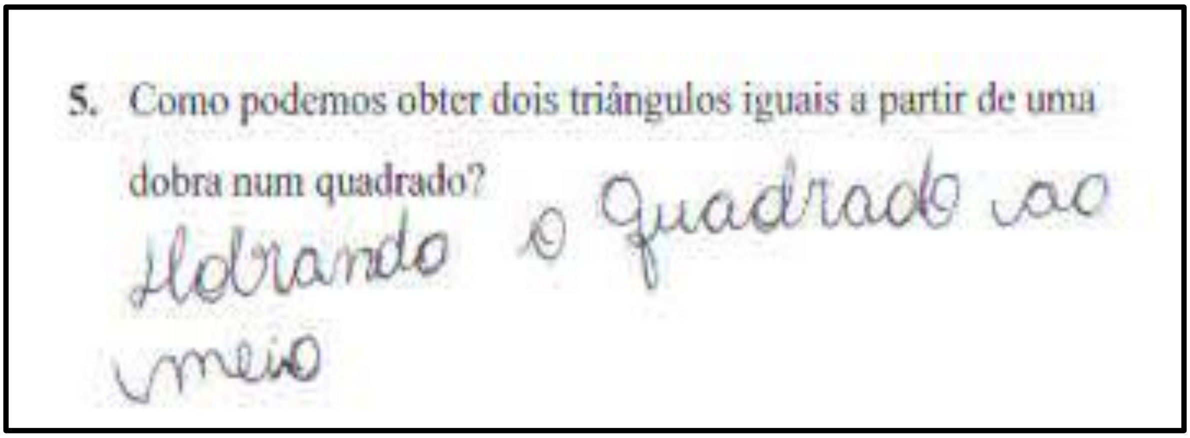
3. Corte o triângulo de vértices A, B, e C. O triângulo ABC é um triângulo equilátero. Por quê?

Sim. Porque possui todos os lados iguais ângulos iguais

FIG. 3

Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 5.9- Resposta estudante C



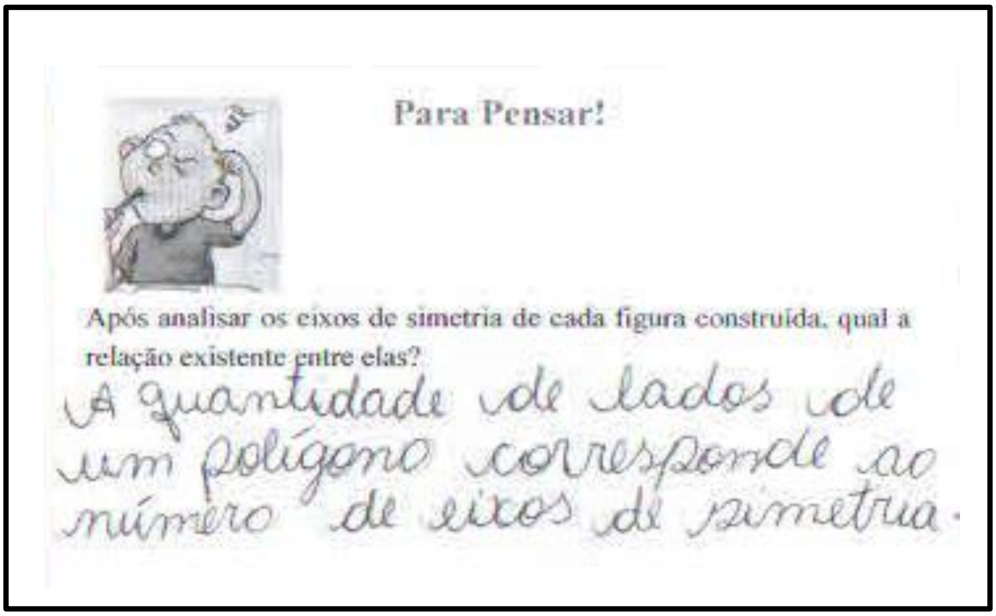
5. Como podemos obter dois triângulos iguais a partir de uma dobra num quadrado?

dobrando o quadrado ao meio

Fonte: Arquivo Pessoal

Já na tarefa 3,aconteceu a construção do pentágono regular. Após a construção dos polígonos foi deixado para os estudantes uma seção denominada **Para Pensar!** Havia uma pergunta para que eles estabelecessem a relação existente entre as figuras construídas e o número de eixos de simetria. As respostas para essa pergunta foram:

Figura 5.10- Resposta estudante C


Para Pensar!

Após analisar os eixos de simetria de cada figura construída, qual a relação existente entre elas?

A quantidade de lados de um polígono corresponde ao número de eixos de simetria.

Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 5.11- Estudantes resolvendo atividades

Fonte: Arquivo Pessoal

Por meio das atividades escritas que os estudantes realizaram, observou-se uma melhor compreensão de como nomeá-los e caracterizá-los bem como a facilidade de identificar ao seu redor objetos que dão a ideia dos mesmos.

Análise do teste de Sondagem

O teste de Sondagem foi elaborado pelos pesquisadores com intuito de verificar se o *origami* se constituiu como um recurso didático no processo de ensino e aprendizagem de Geometria. O teste foi composto por 15 questões, envolvendo somente os 3 primeiros níveis, contendo 5 questões de cada nível, as questões eram abertas e fechadas.

Durante a análise dos dados verificamos que os estudantes se saíram melhor do que no primeiro teste, pois, apesar do teste de sondagem não apresentar o mesmo grau de dificuldade que o primeiro aplicado, as questões elaboradas estavam de acordo com os conteúdos e conceitos trabalhados com os estudantes na construção dos poliedros de Platão.

Somente através do teste de van Hiele não poderia-se afirmar que todos os estudantes possuíam um conhecimento que os colocasse dentro de um dos níveis da teoria. Porém, com a análise do teste de sondagem, baseado nas construções através de *origami*, acredita-se no desempenho relativamente alto dos estudantes pelo melhor desenvolvimento no segundo teste, após a atividade proposta.

Como no teste de van Hiele, foi realizada a correção das questões, utilizando o critério de certo e errado, onde as questões incompletas ou em branco foram consideradas erradas. Optou-se por esse tipo de correção para verificar se os estudantes avançaram de nível ou alcançaram um determinado nível.

Na tabela abaixo (5.2) é apresentado para cada nível (Básico, Nível 1 e Nível 2) o desempenho dos estudantes, na análise das respostas corretas

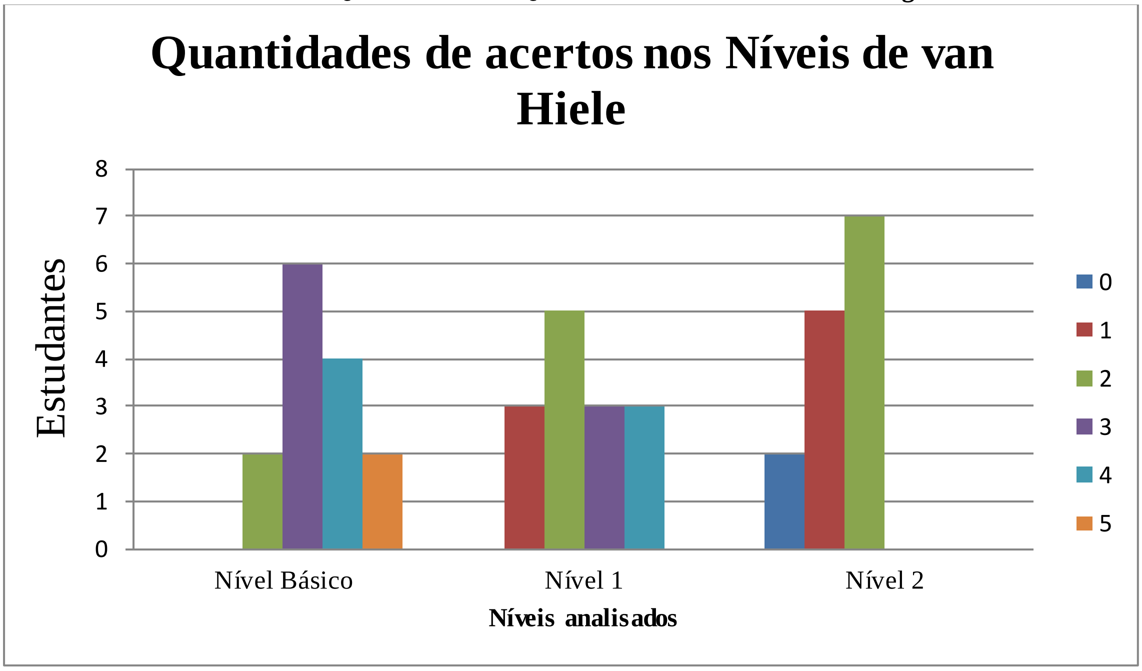
Tabela 5.2 Quantidades de Questões Certas no teste de Sondagem

Quantidades de Questões Certas / Níveis de van Hiele	0	1	2	3	4	5
Nível Básico	-	-	2	6	4	2
Nível 1	-	3	5	3	3	-
Nível 2	2	5	7	-	-	-

Fonte: Dados da pesquisa

No gráfico 5.2 estão representadas as quantidades de acertos em cada nível do teste de sondagem.

Gráfico 5.2 Quantidades de Questões Certas no teste de Sondagem



Fonte: Dados da pesquisa

A análise da tabela ou do gráfico mostra-nos uma evolução dos estudantes acerca dos níveis de propostos pela Teoria de van Hiele, pois nota-se que 6 estudantes acertaram 3 questões , 4 estudantes acertaram 4 questões e 2 acertaram as 5 questões do nível de **Reconhecimento**.

No nível 1 que refere-se a **Análise** segundo a teoria percebemos também uma melhora, pois 3 estudantes acertaram 3 questões e 3 acertaram 4 questões.

Nenhum dos pesquisados conseguiu evoluir para o nível 2 que é o nível de **Abstração**.

De modo geral pelas leituras das tabelas ou dos gráficos tanto no que se refere ao teste de van Hiele ou o teste de Sondagem, verifica-se que quase todos estudantes que não encontravam-se na teoria com o primeiro teste, no segundo saíram melhor alcançando pelo menos o nível de reconhecer uma figura. Além disso, alguns puderam ainda alcançar até o nível seguinte.

Fazendo uma comparação entre os testes podemos perceber a evolução dos estudantes na teoria. No teste de van Hiele 12 estudantes não poderiam ser classificados dentro dos níveis da teoria, estariam passando pelas fases de aprendizagem. No nível Básico 1 estudante acertou 3 ou 5 questões , classificando-o neste nível. Já no nível 1, 4 estudantes acertaram 3 ou 4 questões, porém somente 1 acertou o percentual que o classificaria dentro da teoria. No nível 2 nenhum dos estudantes conseguiram atingir o percentual desejado. Isto pode ser analisado na tabela a seguir:

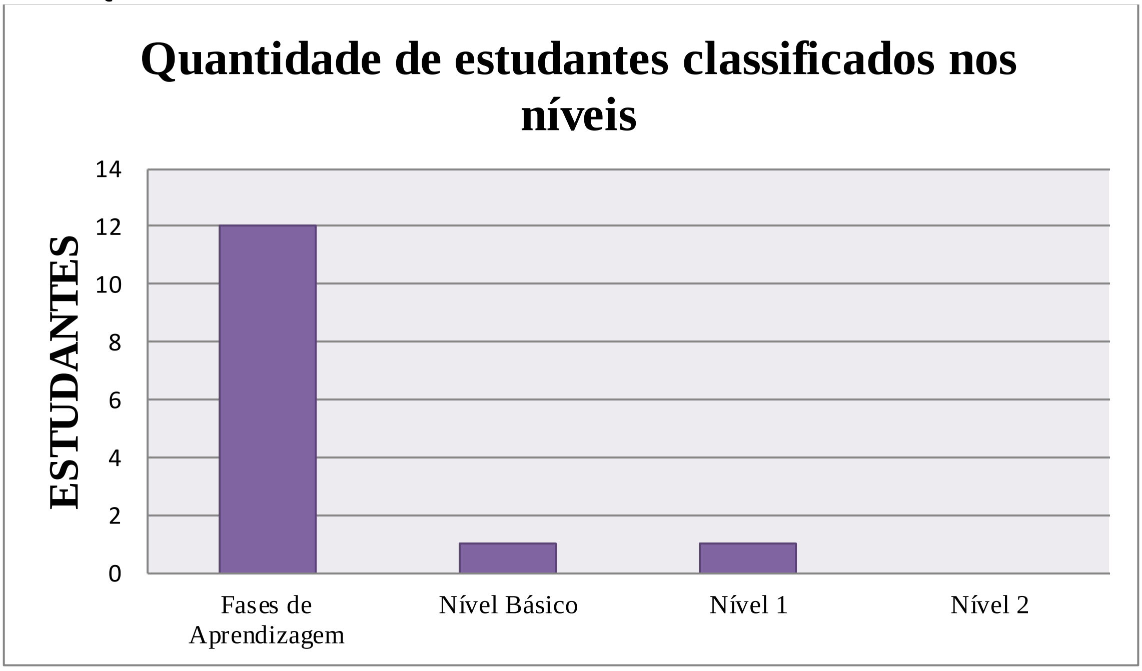
Tabela 5.3 Quantidades de estudantes classificados nos níveis de acordo com o Teste de van Hiele

Níveis de van Hiele \ Quantidade de estudantes classificados nos níveis	
Fases de Aprendizagem	12
Nível Básico	1
Nível 1	1
Nível 2	0

Fonte: Dados da pesquisa

No gráfico 5.3 são apresentados a quantidade de estudantes no teste de van Hiele.

Gráfico 5.3 Quantidades de estudantes classificados nos níveis de acordo com o Teste de van Hiele



Fonte: Dados da pesquisa

Contudo no teste de Sondagem verificamos um avanço dos estudantes nos níveis, isto é, dos 12 estudantes que não se encontravam nos níveis da teoria apenas 2 estudantes continuaram nas fases de aprendizagem. No nível Básico que encontrava somente 1estudante classificado, mais 7 estudantes atingiram o nível. E no nível 1 que possuía 1 estudante classificado, no teste de sondagem verificamos que 5 estudantes atingiram este nível. Já no nível 2 nenhum dos estudantes conseguiu atingir o nível determinado. Esses dados podem ser analisados na tabela 5.4.

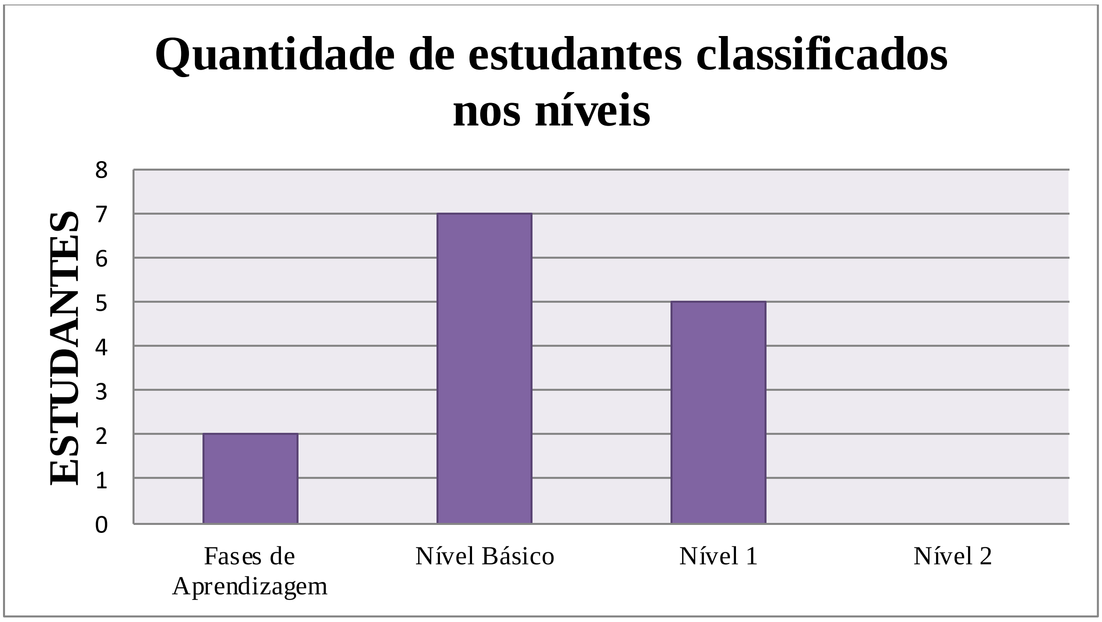
Tabela 5.4 Quantidades de estudantes classificados nos níveis de acordo com o Teste de Sondagem

Níveis de van Hiele \ Classificação dos estudantes nos níveis	
Fases de Aprendizagem	2
Nível Básico	7
Nível 1	5
Nível 2	0

Fonte: Dados da pesquisa

A seguir apresentamos os dados graficamente.

Gráfico 5.4 Quantidades de estudantes classificados nos níveis de acordo com o Teste de Sondagem



Fonte: Dados da pesquisa

Nossa expectativa era possibilitar um maior entendimento da parte dos estudantes em relação à geometria, trabalhando de maneira dinâmica, com manuseio e montagem das peças do *origami*. As discussões surgidas e o comportamento dos estudantes durante a realização da pesquisa mostraram que o uso do *origami* como ferramenta pedagógica pode se constituir como uma alternativa no ensino e aprendizagem de Geometria. Apesar das dificuldades apresentadas em algumas dobraduras, os estudantes mantiveram-se calmos e persistentes, realizando todas as construções.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a realização da pesquisa verificou-se que o uso do *origami* se constitui como uma ferramenta metodológica no processo de ensino e aprendizagem de Geometria. Dessa forma, esperamos ter contribuído para o ensino e aprendizagem de Geometria, trabalhando com a utilização de materiais manipuláveis, explorando conceitos geométricos presentes nas dobraduras realizadas.

O *origami* pode ser utilizado para diversas coisas, principalmente na educação, onde o seu uso, possibilita o desenvolvimento de várias habilidades como, a percepção de igual e diferente, memória, concentração, criatividade, entre outras. Dessa forma, o trabalho com o uso do *origami* torna-se um importante caminho com os estudantes no processo de ensino e aprendizagem de Geometria, que valoriza a participação dos estudantes, sendo o professor o mediador para a aquisição de novos conhecimentos. Deste modo, acreditamos que através das atividades realizadas com a utilização do *origami*, apresentamos aos estudantes uma nova metodologia para o ensino de Geometria.

Contudo destacamos que a utilização do *origami* durante as aulas é de grande valia. Constatamos também que é necessário tempo e disposição, que seja elaborado um planejamento de aula cuidadoso para que a utilização deste recurso não se torne apenas trabalhos manuais e artesanais, mas sim, como um material de exploração de conceitos matemáticos.

E utilização da Teoria de van Hiele para a aprendizagem dos conceitos geométricos referentes à Geometria Euclidiana mostrou-se relevante para o desenvolvimento de conceitos geométricos. E de acordo com Oliveira (2012), acreditamos na teoria de van Hiele como um caminho promissor, capaz de sustentar um projeto efetivo de retomada da Geometria nos currículos escolares brasileiros.

Espera-se que com este trabalho, novas pesquisas possam surgir com a utilização do *origami* aliado à Teoria de van Hiele para o processo de ensino e aprendizagem de Geometria. Finalizamos o texto com uma poética citação Albert Einstein:

"A mente que se abre a uma nova ideia jamais volta ao seu tamanho original."

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, D. C. C.; COSTACURTA, M. S. **Atividades lúdicas para o ensino e aprendizagem da geometria nos anos finais do ensino fundamental.** Chapecó-SC, p. 15, 2010.

ALMIRO, J. **Materiais manipuláveis e tecnologia na aula de Matemática.** Escola Secundária de Tondela. Lisboa, p.7, 2004.

AMÂNCIO, R. A. **Polígonos e Quadriláteros.** Caderno de Atividades, p. 37, 2013.

ANDRADE, C. **Aplicação de técnicas de dobradura no ensino de conteúdos de geometria.** Universidade Federal de Santa Catarina, Centro das Ciências Físicas e Matemáticas. Florianópolis, p.30, 2008.

ARBACH, N. **O ensino de geometria plana: o saber do aluno e o saber escolar.** Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica (PUC). São Paulo, p.20, 2002.

BARRETO, C. A. **A geometria do origami como ferramenta para o ensino da geometria euclidiana na educação básica.** Universidade Federal de Sergipe. Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional (PROFMAT). Sergipe, p. 17-18 , 2013.

BORTOLOSSI, H.J. **Cristais na forma de sólidos platônicos**. CDEME- Conteúdos digitais para o ensino e aprendizagem de matemática e estatística, UFF. Disponível em http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html. Acesso em: 10 de ago. 2014.

BORTOLOSSI, H.J. **Sólidos Platônicos.** CDEME- Conteúdos digitais para o ensino e aprendizagem de matemática e estatística, UFF. Disponível em <http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html>. Acesso em: 10 de ago. 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, p.19, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, p.23, 1998.

BUSKE, N. **Uma contribuição para o ensino de Geometria utilizando Origami e Caleidoscópio.** Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Campus de Rio Claro, p. 27, 2007.

CAVACAMI, Eduardo; FURUYA, Yolanda K. S. **Explorando Geometria com Origami**. Programa de Iniciação Cientifica OBMEP, vol.11, p. 5, 2012.

CORREIA, A. M. A.; FERREIRA, B. L. **Poliedros platônicos: dualidade simétrica.** Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Expressão Gráfica. Curitiba, p, 2, 2007.

CROWLEY, M. L. **O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico.** In. LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org.). Aprendendo e ensinando geometria. São Paulo: Ed. Atual, p. 1- 20, 1994.

Elementos primordiais segundo Platão. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Poliedro> . Acesso em: 10 de ago. 2014.

E, A. Disponível em: < http://www.paralerepensar.com.br/albert_einstein.htm>. Acesso em: 13 de ago. 2014.

FERREIRA, F. E. **Ensino e aprendizagem de poliedros regulares via a teoria de Van Hiele com origami.** São José do Rio Preto, p. 13- 36, 2013.

FERREIRA, F. E. **Ensino e aprendizagem de poliedros regulares via teoria de van Hiele com origami.** Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional (PROFMAT). São Paulo, p, 13-34, 2013.

GAZIRE, E. S. **O não resgate da Geometria.** Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Programa de Pós – Graduação em Educação Matemática, p.35-55 e p. 185-186, 2000.

GÊNOVA, A. C. **Origami: A milenar arte das dobraduras.** São Paulo:Escrituras, 2001.

GRANDO, C. M. **Geometria**: espaço e forma. Chapecó: Unochapecó; Coordenadoria de Educação a Distância, p. 7, 2008.

HIGA, A. **Tipos de Origami.** Oficina do Origami, 2012. Disponível em <http://oficinadoorigami.blogspot.com.br/2011/03/tipos-de-origami.html>.

IBRAIM, E. S.R.; BARRETO, M. S. **O Uso de Dobraduras e Origami o ensino da Geometria Plana.** Encontro Nacional de Educação Matemática (XI ENEM), Curitiba-PR, p.9, 2013.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? In: Educação Matemática em Revista. v. 4, 1995, p. 3- 25.

MARTINS, J. A. **O emprego do origami no ensino-aprendizagem dos números racionais relativos.** Centro Universitário Franciscano (UNIFRA), Santa Maria- RS, p.7, 2009.

MARTINS, J. A. **Uma proposta teórica para futura implementação do origami arquitetônico no ambiente “a arte das dobraduras”.** Universidade Federal de Santa Catarina, Centro das Ciências Físicas e Matemáticas. Florianópolis, p.31, 2008.

MUNIZ, C. A. **Explorando a Geometria da orientação e do deslocamento.** GESTAR II, TP6, p. 80-102, 2004.

NACARATO, A. M. **Eu trabalho primeiro no concreto.** Revista de Educação Matemática , Ano 9, Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo, p.1-4, 2005.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. **Geometria segundo a Teoria de van Hiele**. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática- Projeto Fundão, p.6, 2010.

NEVES, R.S.P. **Aprender e ensinar Geometria: um desafio permanente.** Matemática nas Formas Geométricas e na ecologia, Programa Gestão da Aprendizagem Escolar. Brasília, p. 57, 2008.

OLIVEIRA, F.F. **Origami:** Matemática e Sentimento. p.17, 2004.

OLIVEIRA, M. C. **Ressignificando Conceitos de geometria plana a partir do estudo de sólidos geométricos.** Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC). Belo Horizonte, p. 47, 2012.

PAIVA, J. P. A. A.; BEZERRA, M. C. A. **O Origami no ensino de Geometria:** uma experiência em sala de aula. p. 8, 2009.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. Revista Zeretiké, Ano I- nº1, p. 1, 1993.

PAVANELLO, R. M. **Por Que Ensinar /Aprender Geometria?** Universidade Estadual de Maringá, p. 2, 1995.

PIROLA, D. L. **A arte das dobraduras um enfoque geométrico na pratica do origami.** Universidade Federal de Santa Catarina Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Florianópolis, p. 9- 40, 2004.

RANCAN, G. **Ensino de geometria e arte do Origami:** experiência com futuros professores. II Congresso Nacional de Educação Matemática (CNEM), IX Encontro Regional de Educação Matemática (EREM), p.2-24, 2011.

RANCAN, G.; GIRAFFA, L.M.M. **Geometria Do Origami:** Investigando Possibilidades Para Ensinar Geometria. Revista Ciências & Ideias, v. 3, n. 2, p.2, out./2011-mar./2012.

REIS, E. A. **Os poliedros de Platão**. Universidade Federal de Sergipe. Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional (PROFMAT). Sergipe, p. 23 , 2013.

RODRIGUES, L. J.; ARAÚJO, A. S. de. ; ROCHA, I. B. P.; SCHULZ, L. M.;SILVESTRE, I.B. M. **Brincando com a geometria das dobraduras.** XVI Congresso de Iniciação Científica, p.3, 2007.

SCOLARO, M. A. **O uso dos materiais didáticos como recurso pedagógico nas aulas de matemática.** p.7, 2009.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I; CÂNDIDO, P. **Figuras e Formas.** ed. Porto Alegre: Artmed, p. 64, 2003.

SOUZA, G. C.; OLIVEIRA, J. D. S. **O uso de materiais manipuláveis e jogos no ensino de matemática. X Encontro nacional de Educação Matemática.** Salvador- BA, p. 2, 2010.

APÊNDICE

APÊNDICE A – TERMO DE AUTORIZAÇÃO E COMPROMISSO DA PESQUISA

TERMO DE AUTORIZAÇÃO E COMPROMISSO

Firmam o presente Termo de Autorização e Compromisso, para realização de atividades de pesquisa com alunos do 3ª série Ensino Médio da Escola Estadual "Major Lermino Pimenta" SJE-MG, Pais/Responsáveis, Professores e a Direção da Escola, ficando estabelecido:

1) Eu, ____estudante da turma _________, estou ciente que participarei das atividades da pesquisa proposta, comprometendo-me executá-las dentro dos padrões da ética, das boas relações humanas. Autorizo o uso e a divulgação acadêmica de fotos e/ou vídeos relativos à minha imagem.
2) Eu, ____ Pai (Mãe) /Responsável, autorizo meu (minha) filho (a), participar de atividade da pesquisa proposta denominada "**A CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS DE PLATÃO ATRAVÉS DO *ORIGAMI* ALIADA A TEORIA DE VAN HIELE NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA EUCLIDIANA**". Estou ciente da sua participação no período e horário estabelecido pelos professores, bem como, autorizo para fins acadêmicos, o uso da sua imagem pessoal.
3) Nós, **AIRTON FLORA DE OLIVEIRA, AMANDA COSTA SANTOS e JOÃO APARECIDO DE ANDRADE**, alunos do Curso de Licenciatura em Matemática no Instituto Federal de Minas Gerais – Campus São João Evangelista, nos comprometemos a realizar a pesquisa baseando-nos na ética e nas boas relações humanas. Comprometemos ainda, zelar pelas produções e imagens dos participantes.
4) Eu, **ROBERTO ABDALA SANTOS**, professor de Matemática dos alunos participantes desta pesquisa estou ciente e de acordo com a mesma.
5) Eu, **KÁSSIO FRANKLIN BORGES DOS SANTOS,** diretor da escola, estou ciente desta pesquisa no âmbito desta instituição. Autorizo a utilização das dependências internas para os fins da mesma e de eventuais imagens e vídeos da estrutura física.

Assim, por estarem cientes, assinam o presente termo.

São João Evangelista, ________de ________________________de 2014.

_______________________________ Aluno (a)

____________________________________ Pais/Responsáveis

________________________________ Diretor

____________________________________ Professor (a)

_______________________________ Responsável I pela execução da pesquisa

___________________________________ Responsável II pela execução da pesquisa

___________________________________ Responsável III pela execução da pesquisa

APÊNDICE B –ATIVIDADE: 2 "QUADRILÁTEROS - CARACTERÍSTICAS & PROPRIEDADES"

Propriedades	Nome das figuras					
	QUADRILÁTERO	TRAPÉZIO	LOSANGO	PARALELOGERAMO	RETÂNGULO	QUADRADO
Tem quatro lados.						
Tem quatro lados iguais.						
Tem quatro ângulos.						
Apenas um par de lados opostos paralelos.						
Lados opostos congruentes (iguais).						
Ângulos opostos congruentes.						
Quatro ângulos retos.						

APÊNDICE C –FOLHA DO ESTUDANTE

Vamos Trabalhar?

CONSTRUINDO POLÍGONOS REGULARES COM DOBRADURAS

Tarefa 1 – Quadrado

Material: Papel A4

Desenvolvimento:

1. Dobre a folha A4, encontrando um quadrado.
2. Dobre-o ao meio e mais uma vez ao meio.
3. A partir desse origami, quantos eixos de simetria podemos encontrar?
4. Com o quadrado pronto, dobre-o em quatro quadrados, usando somente duas dobras.
5. É possível obter dezesseis quatro a partir de quatro dobras é sobre um quadrado? Justifique.

Tarefa 2– Triângulo

Material: Papel A4
Desenvolvimento:

1. Dobre a folha A4 ao meio pelo lado maior, obtendo uma dobra perpendicular à base menor AB (FIG. 1).

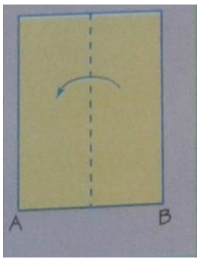


FIG. 1

2. Dobre novamente, fazendo o ponto B coincidir com a 1ª linha de dobra. Marque o ponto C.

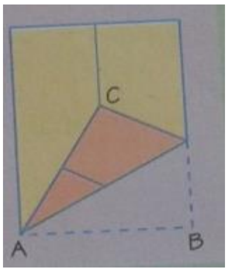


FIG. 2

3. Corte o triângulo de vértices A, B, e C. O triângulo ABC é um triângulo equilátero. Por quê?

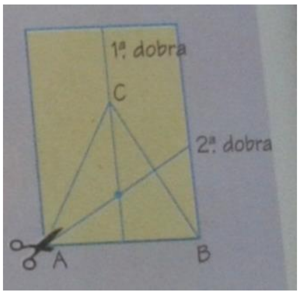


FIG. 3

4. Após a construção desse polígono, responda: quantos eixos de simetria ele possui?
5. Como podemos obter dois triângulos iguais a partir de uma dobra num quadrado?

Tarefa 3– Pentágono

Material: Papel A4

Desenvolvimento:

1. Providencie uma tira de papel com 2 cm de largura e 4 cm de comprimento.
2. Dê um "nó" de acordo com o esquema da figura 5 e obtenha um pentágono regular.

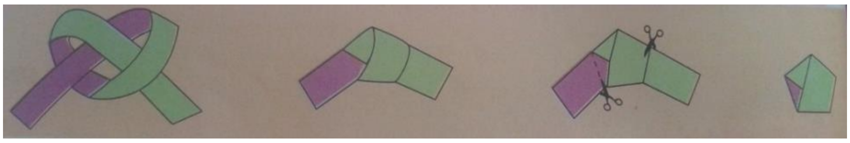


FIG. 4

3. Após a construção desse polígono, responda: quantos eixos de simetria ele possui?

Para Pensar!

Após analisar os eixos de simetria de cada figura construída, qual a relação existente entre elas?

APÊNDICE D – FOLHA DO ESTUDANTE (II)

Vamos Praticar! Construção dos poliedros de Platão

Iniciaremos a construção dos poliedros de Platão pelo Hexaedro (Cubo), formado por 6 faces quadradas. A partir de um quadrado, siga o passo a passo ilustrado na figura 6:

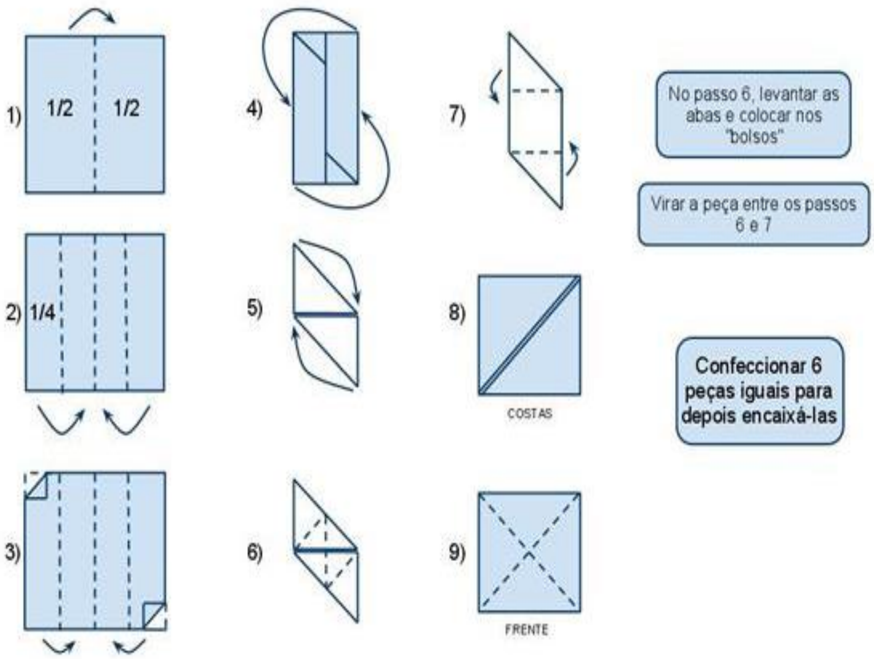


FIG.5

1º Passo: Com o quadrado em mãos, dobre-o ao meio, item 1.

2º Passo: Depois de dobrada ao meio, abra a folha e dobre ao meio cada metade encontrando uma razão que corresponde a $1/4$.

3º Passo: Escolha um dos vértices, e leve-o até a dobra que determina $1/4$ da folha, obtendo um triângulo retângulo na ponta. Repita o procedimento com o vértice oposto, item 3.

4º Passo: Dobre a folha na primeira dobra, como na imagem 4.

5º Passo: Dobre sobre os segmentos obtidos pelo prolongamento dos segmentos correspondentes a hipotenusa dos triângulos retângulos obtidos anteriormente, item 5.

6º Passo: Observe que a figura encontrada é um paralelogramo. Abra-o e encaixe as pontas nas aberturas, item 6.

7º Passo: Após encaixadas as pontas, vire e leve uma das pontas até o vértice adjacente. Faça o mesmo com a outra ponta, item 7.

8º Passo: Observe que surge uma diagonal que corresponde a diagonal do quadrado, item 8.

9º Passo: Abra as pontas do quadrado, e encontre o módulo do cubo!

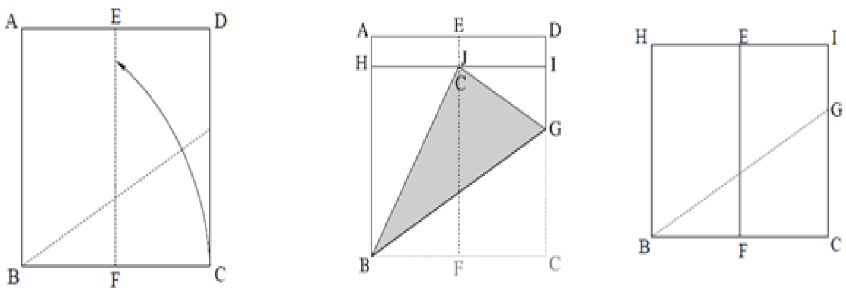
10º Passo: Faça cinco módulos como este para montagem do cubo.

11º Passo: Para a montagem, deve-se encaixar as pontas nas aberturas

Poliedros de Faces Triangulares:

Entre os cinco poliedros de Platão, três deles são constituídos de faces triangulares: tetraedro, octaedro e icosaedro. Agora faremos a construção dos módulos que se encaixam formando assim os poliedros de faces triangulares. Para a construção destes poliedros de faces triangulares é necessário a obtenção de um retângulo com proporções especiais.

Obtenção do retângulo especial



(a) **(b)** **(c)**

FIG. 6

1. Passo: Com folha A4 em mãos, encontre o quadrado ABCD de lado 1.
2. Passo: Dobre a folha ao meio, encontrando um segmento perpendicular aos lados, (FIG. 7 a).
3. Passo: Fixe um dos vértices e leve o vértice adjacente até o segmento perpendicular encontrado anteriormente, (FIG 7 b).
4. Passo: No ponto obtido pela interseção do vértice com a perpendicular, trace uma perpendicular passando por ele, (FIG 7 b).
5. No triângulo HBJ, vale a igualdade (por quê?):

$$HB^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$$

$$HB = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1. Passo: Recorte a folha passando pela reta HI, como na (FIG 7 c).

No retângulo BCIH, vale a proporção:

$$\frac{BC}{HB} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

2. Passo: Divida o retângulo encontrado ao meio, obtendo assim a proporção $\frac{1}{\sqrt{3}}$, (FIG 8).

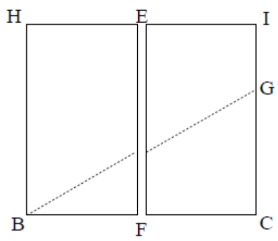


FIG. 7

$$\frac{BF}{HB} = \frac{FC}{IC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Construção dos Módulos

Construiremos agora os módulos, ou unidades, denominados A e B dos poliedros de faces triangulares. Para isso será necessário a utilização de retângulos de proporção $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Unidade A

1º Passo: Com uma peça retangular $ABCD$, respeitando as proporções, leve o vértice B ao D.

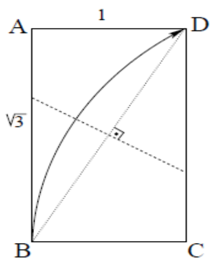


FIG. 8

2º Passo: O segmento EFé mediatriz de BD. Os triângulos ΔEFD e ΔEFB são equiláteros de lado $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

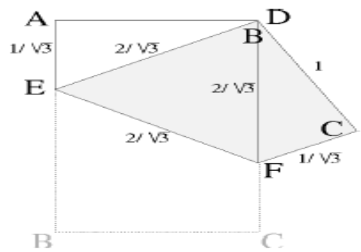


FIG. 9

3º Passo: Leve o vértice B ao ponto F. A nova dobra é paralela a AD.

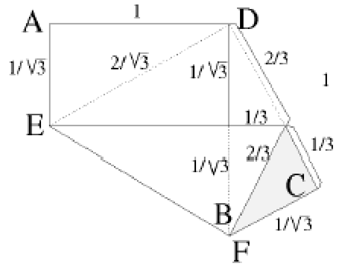


FIG. 10

4º Passo: Leve o vértice C sobre DF.

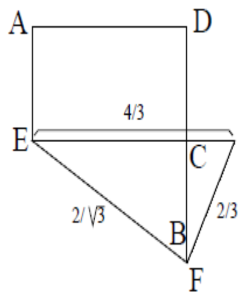


FIG. 11

5º Passo: Vire a peça, de modo que a parte de trás fique para frente.

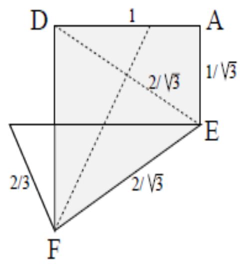


FIG. 12

6º Passo: Leve o vértice D ao ponto E.

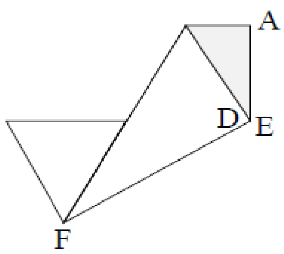


FIG. 13

7º Passo: Mova o vértice A dobrando segundo o eixo do ponto E.

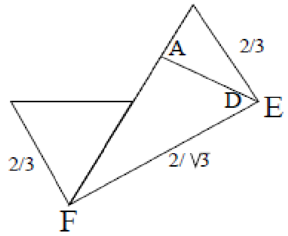


FIG. 14

8º Passo: Desfaça a dobra pelo eixo EF, de modo que apareça um paralelogramo.

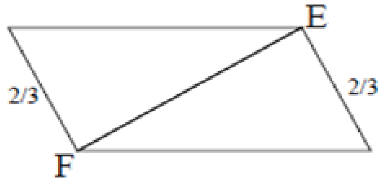


FIG. 15

9º Passo: Vire a peça, de modo que a parte oculta volte-se para a frente.

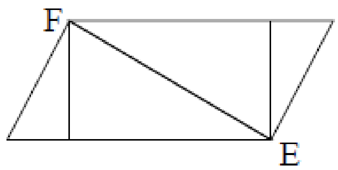


FIG. 16

10º Passo: Leve as duas extremidades cujos ângulos são agudos sobre o lado oposto, fixando os vértices com os ângulos obtusos.

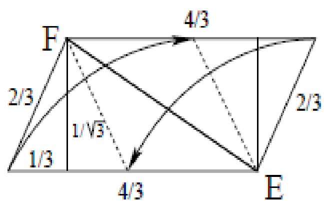


FIG. 17

11º Passo: Obtém-se um losango cujos lados e a diagonal menor medem $^{2}/_{3}$.

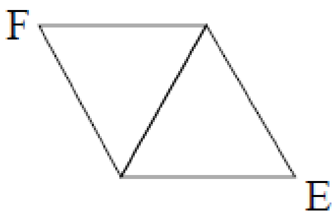


FIG. 18

Unidade B

A construção segue os mesmos procedimentos da unidade A, com a diferença do lado pelo qual inicia-se a dobra.

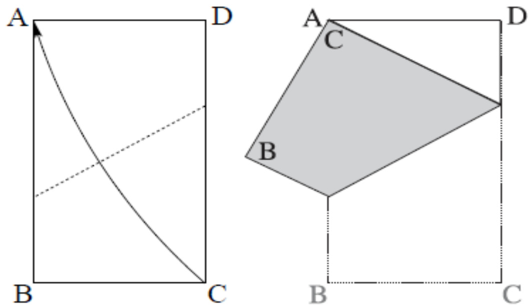


FIG. 19

Dodecaedro

Para a construção do Dodecaedro é necessário uma medida especial, denominada Retângulo Áureo. Para isto utilizaremos nesta construção o lado do pentágono que é o segmento áureo da diagonal. Como produto final, podemos encontrar o retângulo áureo.

1º Passo: Considere um quadrado $ABCD$ de lado 2. Junte os vértices A com B e Dcom C, obtendo assim um retângulo de 2 x 1 e o lado EF.

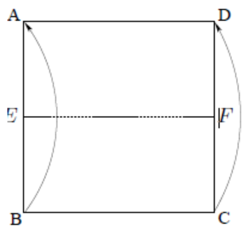


FIG. 20

2º Passo: No retângulo $BEFD$ escolha uma diagonal, digamos, BF. Pelo Teorema de Pitágoras,

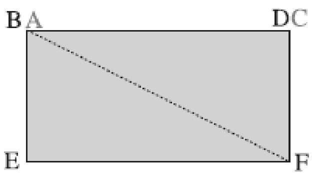


FIG. 21

$$\overline{BF}^2 = 2^2 + 1^2 \Longrightarrow \overline{BF} = \sqrt{5}$$

3º Passo: Usando a diagonal como eixo de rotação, dobre o vértice C para fora.

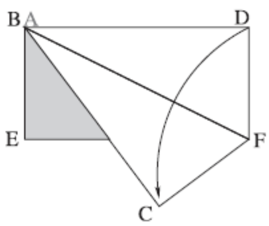


FIG. 22

4º Passo: Fixando em F, leve o ponto C ao segmento BFe marque o ponto C'.

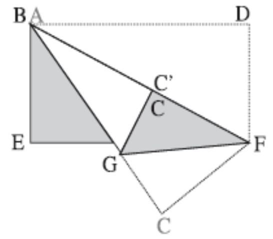


FIG. 23

5º Passo: Voltando para o quadrado inicial, fixe Be leve o vértice A até BF.

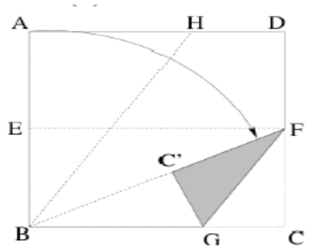


FIG. 24

6º Passo: Subtraia $\overline{BC}' = \sqrt{5} - 1$ do lado $\overline{AB} = 2$; o resto, ou seja, CA', divida ao meio no ponto O.

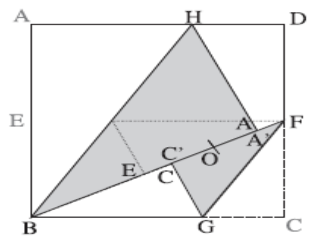


FIG. 25

7º Passo: Com a mesma distância de AO, a partir de B, marque o ponto O'.

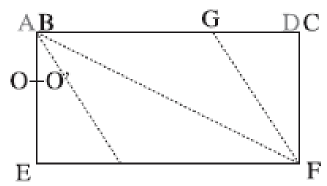


FIG. 26

8º Passo: Temos então que o segmento OO' tem comprimento igual a $\overline{BC}' = \sqrt{5} - 1$, podendo ser um dos lados do pentágono.

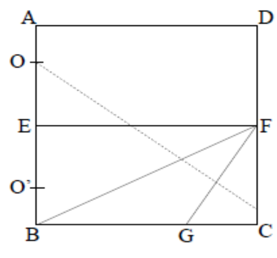


FIG. 27

9º Passo: Fixando O, leve o ponto O' até AD. Marque como P onde O' toca AD.

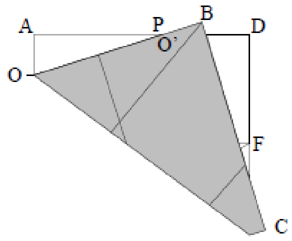


FIG. 28

10º Passo: Analogamente, marque como Q o ponto onde O encontra BC. Dobre por OP e $O'Q$.

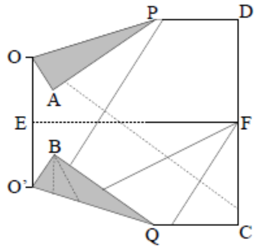


FIG. 29

11º Passo: Fixando P, leve O ao segmento EF. Note que a dobra faz-se em torno do eixo dos pontos P e o ponto médio de $O'Q$.

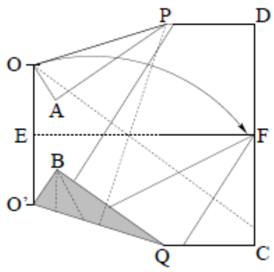


FIG. 30

12º Passo: Continuando, leve os vértices D e C sobre o quadrilátero $OPRO'$.

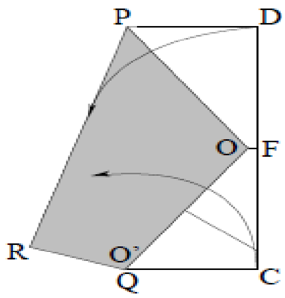


FIG. 31

13º Passo: Volte apenas a dobra efetuada sobre o eixo PR, obtendo assim um pentágono regular.

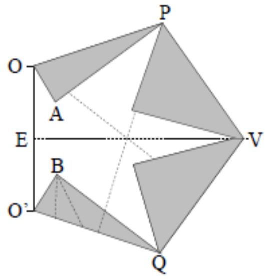


FIG. 32

14º Passo: Abra dos segmentos $\overline{PV}$ e $\overline{VQ}$. Depois dobre uma reta perpendicular passando pelos pontos P e Q. O resultado é obtenção do retângulo áureo.

15º Passo: Começando com um retângulo $ABCD$, dobre a diagonal BC.

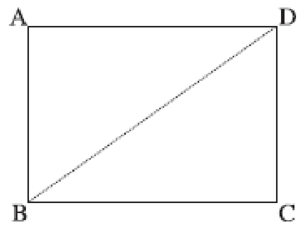


FIG. 33

16º Passo: Encontrando o ponto E, intersecção de AD com BC, dobre por EB e ED, de modo que não prenda a parte oposta.
Observe que o triângulo ΔBED é isósceles.

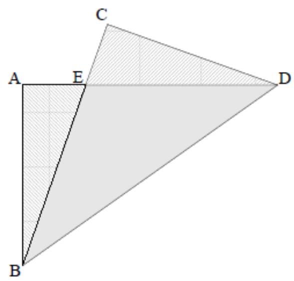


FIG. 34

17º Passo: Dobre agora a $\widehat{B}.$ bissetriz de

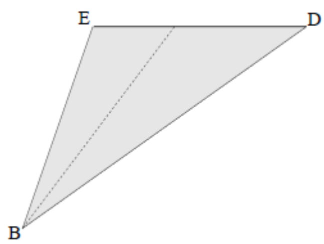


FIG. 35

18º Passo: Encontrado o ponto F, intersecção da $\widehat{B}$ bissetriz de com ED, dobre a mediatriz de BF, donde surge o segmento GH, com $G \in EB$ e $H \in BD$.

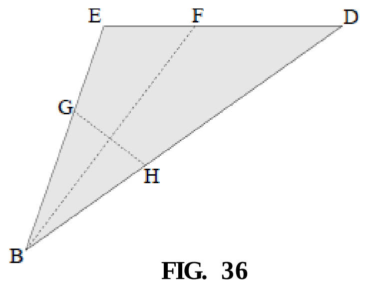


FIG. 36

19º Passo: Como GH é mediatriz de BF, dobre levando B a F.

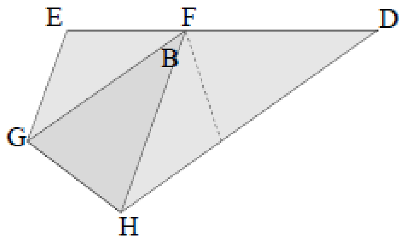


FIG. 37

20º Passo: Seguindo os mesmos procedimentos do vértice B, dobre D sobre G. Um pentágono possivelmente irregular, mas simétrico, está pronto.

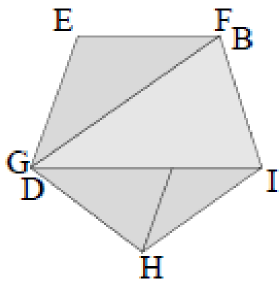


FIG. 38

APÊNDICE E –CARTILHA

A CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS DE PLATÃO ATRAVÉS DO ORIGAMI

AIRTON FLORA DE OLIVEIRA
Licenciando no Instituto Federal de Minas Gerais, Campus São João Evangelista.

AMANDA COSTA SANTOS
Licencianda no Instituto Federal de Minas Gerais, Campus São João Evangelista.

JOÃO APARECIDO DE ANDRADE
Licenciando no Instituto Federal de Minas Gerais, Campus São João Evangelista.

APRESENTAÇÃO

Este material é fruto de um trabalho de pesquisa sobre as contribuições da utilização do *origami* aliada a Teoria de van Hiele no processo de Ensino e Aprendizagem de Geometria Euclidiana. Tem por objetivo servir de apoio aos pesquisadores durante a aplicação do projeto, sendo que, o mesmo baseia-se na "Teoria do Desenvolvimento do Pensamento Geométrico". A teoria pode ser considerada um modelo, onde o mesmo sugere que os estudantes progridem segundo uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, enquanto eles aprendem geometria.

A seguir, serão apresentados conceitos, definições e atividades relacionadas aos conteúdos necessários nas construções dos Poliedros de Platão com uso do *origami*. Utilizaremos o *origami* enquanto alternativa pedagógica para auxiliar o processo de ensino e aprendizagem de geometria, que consiste em discutir formas de se trabalhar conceitos geométricos a partir do uso de dobraduras. O *origami*¸ por ser uma arte de custo acessível, pode contribuir de forma significativa no processo de ensino e aprendizagem de Geometria, pois através dele é possível ao estudante tocar, sentir, manipular e movimentar o objeto de estudo.

> *"Geometria é 'compreender o espaço'. Compreender o espaço em que a criança, respira, se move. O espaço que a criança deve aprender a conhecer, explorar, conquistar, de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor.(...). A geometria presta-se, mais do que outros temas, para a aprendizagem da matematização da realidade e para a realização de descobertas, que sendo feitas também "com os próprios olhos e mãos, são mais convincentes e surpreendentes."*
>
> *Hans Freudenthal – 'The Case of Geometry'*

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO 3

1 POLÍGONOS **5**

1.1 Construindo polígonos regulares com dobraduras **6**

2 POLIEDROS **8**

2.1 Poliedros de Platão **9**

2.2 Os sólidos de Platão na Natureza **10**

3 ORIGAMI NO ENSINO DE GEOMETRIA **11**

3.1 Construção dos poliedros de Platão Através do Origami **13**

REFERÊNCIAS **21**

A Geometria é um dos ramos mais importantes da Matemática. Seu estudo surgiu de forma intuitiva e da necessidade humana, teve sua origem no Egito as margens do rio Nilo no século V a.C. Sabemos que a palavra Geometria é de origem grega, que deriva da palavra *geometrein*, onde *geo*, significa terra e *metrein*, significa medir, assim, geometria é a ciência de medir terras.

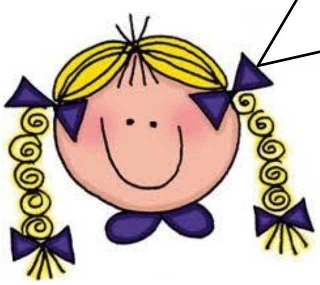
POLÍGONOS

Andando pelas ruas de qualquer cidade podemos perceber uma grande quantidade de formas que nos lembram polígonos, tais como, placas de trânsito, semáforos, muros, entre outros. A palavra polígono deriva do grego (*Polus*) muitos e (Goniá) ângulos. Apesar da palavra polígono dar a ideia de vários ângulos, geralmente os polígonos são nomeados a partir do número de lados.

Definição: Polígono é uma região plana limitada por uma linha poligonal fechada.

Polígonos Regulares:

Um polígono é regular se os seus ângulos e os seus lados forem iguais, isto é, se for simultaneamente equiângulo e equilátero. Veja abaixo alguns exemplos de polígonos regulares.



Polígonos Regulares

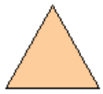
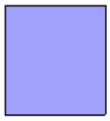
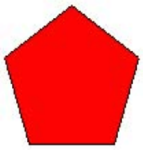
Triângulo Equilátero		• Tem três lados iguais • Tem três vértices
Quadrado		• Tem quatro lados iguais • Tem quatro vértices
Pentágono		• Tem cinco lados iguais. • Tem cinco vértices.

FIG. 1

Você pode observar exemplos de outras figuras planas que não são polígonos:

Não polígonos

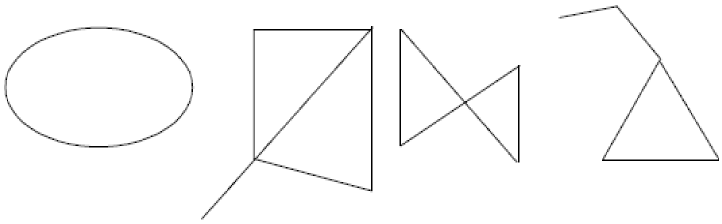


FIG. 1.2

Polígonos Côncavos e Convexos

Um polígono é **côncavo** ou convexo se a linha poligonal que o define for côncava ou convexa, respectivamente. Um polígono é côncavo quando alguma das suas diagonais não se encontrar no interior do polígono, ou se uma reta puder cortá-lo em mais de dois pontos. Pelo contrário um polígono é **convexo** quando todas as suas diagonais se encontrarem no interior do polígono, ou se uma reta puder cortá-lo em dois dos seus pontos.

Os polígonos (a) e (b) são convexos, enquanto o polígono (c) é côncavo:

Polígonos Côncavos e Convexos

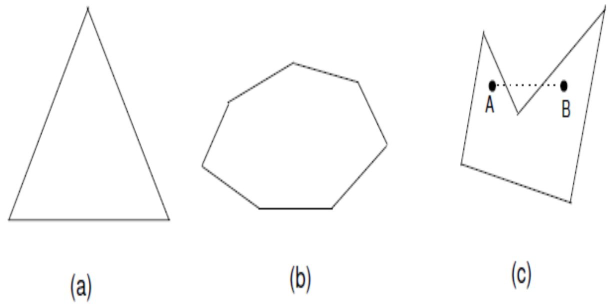


FIG. 1.3

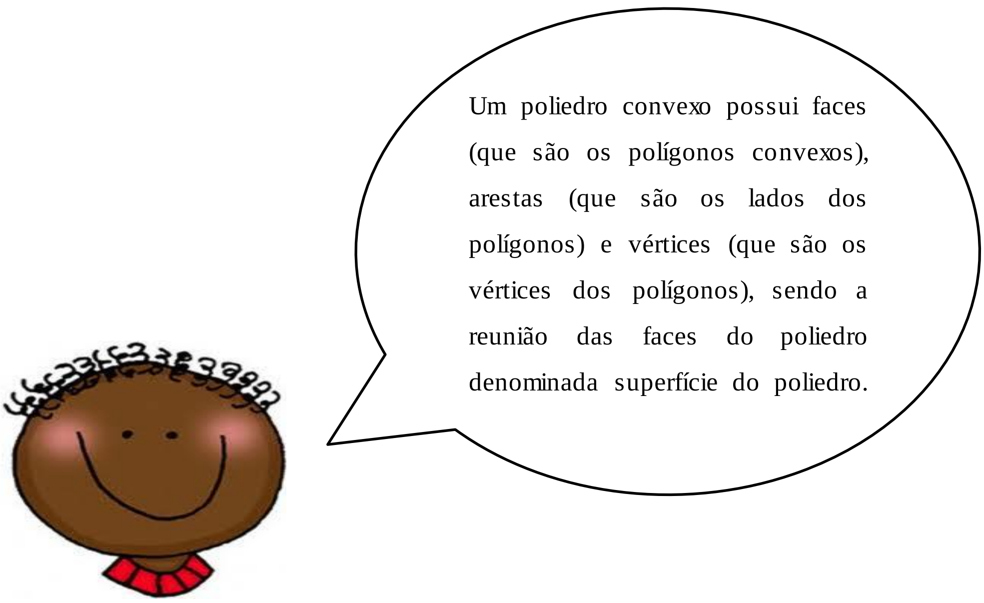
POLIEDROS

A palavra poliedro tem sido usada em diferentes épocas por diferentes pessoas com os mais variados significados. A definição de poliedro a qual se refere este trabalho provém de CARVALHO (1999), que considera um poliedro como sendo toda região do espaço delimitada por um conjunto de polígonos planos (região poligonal) que satisfazem as seguintes condições:

i) a interseção de dois polígonos é vazia ou é um vértice comum aos dois polígonos ou é um lado comum aos dois polígonos;

ii) cada lado de um polígono é lado de exatamente mais um outro polígono.

Poliedros Convexos:



Exemplo de um poliedro convexo e um poliedro côncavo:

Um poliedro convexo e um não convexo

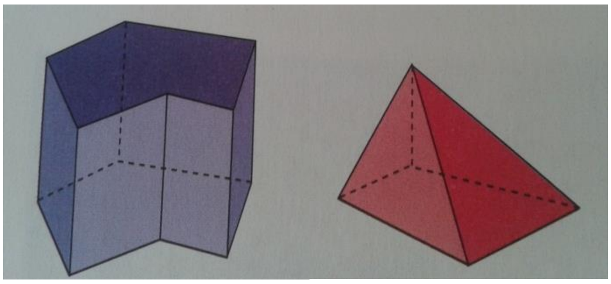


FIG 1.4 Fonte: Matemática na vida e na escola

O Teorema de Euller para Poliedros Convexos

De acordo com Bicalho (2013), a fórmula de Euler para poliedros foi descoberta em 1758. Na ocasião, o matemático Leonhard Euler escreveu uma carta para seu amigo, Christian Goldbach, também matemático, relatando a descoberta de uma propriedade acerca dos poliedros: se V, A e F são, respectivamente, o número de vértices, arestas e faces de um poliedro, então a relação:

$$V + F = A + 2$$

Tal relação é comumente conhecida como "Fórmula de Euler".

<u>POLIEDROS DE PLATÃO</u>

Platão nascido em Atenas por volta de 427 a.C. foi o primeiro a juntar tópicos que vão da matemática (ciência e linguagem) a religião (ética e arte), tendo abordado tais tópicos de forma unificada. Segundo Gomes (2012), Platão foi discípulo e admirador do grande filósofo grego *Sócrates* (469-399 a. C.), que ao contrário do seu discípulo, repudiava o pitagorismo e possuía profundas dúvidas metafísicas, que o impediram de se dedicar à matemática ou às ciências da natureza. Reis (2013) afirma que Platão foi o primeiro a demonstrar que existem apenas cinco poliedros regulares: o cubo, o tetraedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Ele e seus seguidores estudaram esses sólidos com tal intensidade, que eles se tornaram conhecidos como poliedros de Platão. Os sólidos platônicos são poliedros – sólidos cujas faces têm a forma de polígonos – regulares – todas as faces são polígonos geometricamente iguais (chamam-se congruentes) – e todos os seus ângulos são também congruentes. A existência destes sólidos já era conhecida anteriormente pelos pitagóricos e os egípcios utilizaram alguns deles na arquitetura e em outros objetos que construíram. Por isso são chamados de platônicos. Platão estudou estes sólidos e demonstrou que eram os únicos sólidos com as faces todas iguais.

Elementos primordiais segundo Platão

FIG. 1.5 Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Poliedro

Correia e Ferreira (2007) afirmam que, Platão defendia que, uma vez que o mundo só poderia ter sido feito a partir de corpos perfeitos, estes elementos deveriam ter a forma de sólidos regulares. Na associação dos poliedros com os elementos da natureza,

- O fogo era o mais leve e o mais violento dos elementos, por isso deveria ser um tetraedro;
- A terra era o elemento mais estável, deveria ser o cubo;
- A água, o elemento mais inconstante e fluído, era um icosaedro, o sólido regular capaz de rolar mais facilmente;
- Quanto ao ar, Platão observou que "o ar é para a água o que a água é para o ar," e concluiu, de forma um pouco misteriosa, que o ar deve ser um octaedro;
- Por último e para incluir o quinto sólido regular, atribuiu ao dodecaedro a representação da forma de todo o universo.

Definição: Chama-se poliedro de Platão todo poliedro que satisfaz as seguintes condições:

i) todas suas faces tem o mesmo número (n) de arestas;

ii) todos os ângulos poliédricos possuem o mesmo número (m) de arestas;

iii) satisfaz a Fórmula de Euler.

PARA SABER MAIS

Os sólidos de Platão na Natureza

Os sólidos platônicos se manifestam na natureza (cristais, organismos vivos, moléculas, etc.) e na cultura humana (pinturas, esculturas, religião, arquitetura, design, etc.). Por exemplo, são muitas as formas cristalinas naturais no formato do tetraedro (calcopirita), do hexaedro (galena) e do octaedro (magnetita)

Cristais na forma dos sólidos platônicos

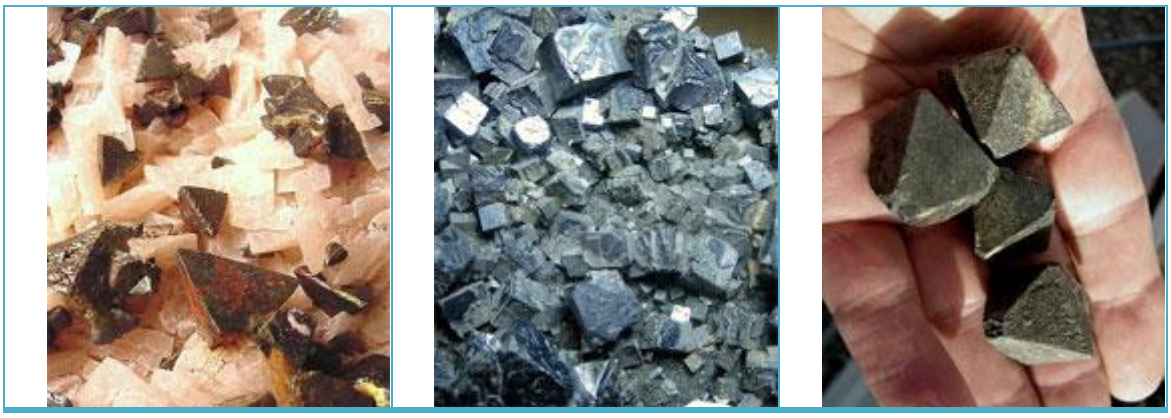


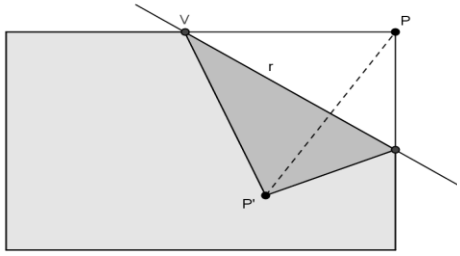
FIG. 1.6 Fonte: Roger Weller apud Bortolossi

Origami no Ensino de Geometria

Segundo Cavacami e Furuya (2012), a aplicação de o*rigami* no ensino da Geometria pode auxiliar no desenvolvimento cognitivo, trazendo assim uma melhor aprendizagem e compreensão da Matemática através da manipulação de um simples pedaço de papel. O o*rigami*, de origem desconhecida, tem etmologia japonesa e significa dobrar (ori) papel (kami).

Axiomas de Dobradura

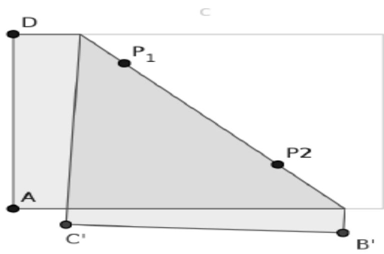
Ainda de acordo com Cavacami e Furuya (2012), embora haja técnicas de origami dobrando linhas curvas, a maioria dos trabalhos destina-se às dobras em linhas retas. Dada uma folha de papel, ao efetuar uma dobra, a mesma gera uma linha reta que divide o plano em dois semiplanos, sendo que os pontos de um deste são refletidos no outro, ou seja, seja considerando r a linha de dobra e P um ponto da folha no semiplano S (Figura); ao efetuar a dobra P é levado no seu simétrico P' em relação a r no semiplano S'. Em outras palavras, a linha de dobra r é a mediatriz de cada par P,P', em que P' é o refletido de P.



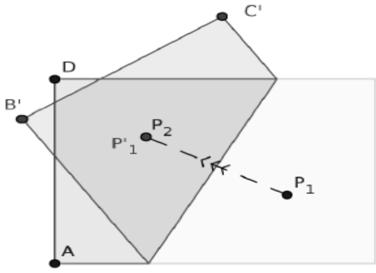
Note ainda que a linha de dobra r da figura é bissetriz de cada ângulo $P\hat{V}P'$ formado por um lado VP com origem em V e seu lado refletido VP'. Desta forma verifica-se que as mediatrizes e as bissetrizes são construções elementares do origami, assim como a construção de paralelas e de perpendiculares.

Da mesma forma que os postulados de Euclides servem de base para as construções realizadas na Geometria Euclidiana, no origami encontram-se os chamados Axiomas da Geometria do Origami, conhecidos por Axiomas de Huzita (ou Huzita–Hatori, ou Huzita–Justin), cujos enunciados traz-se a seguir:

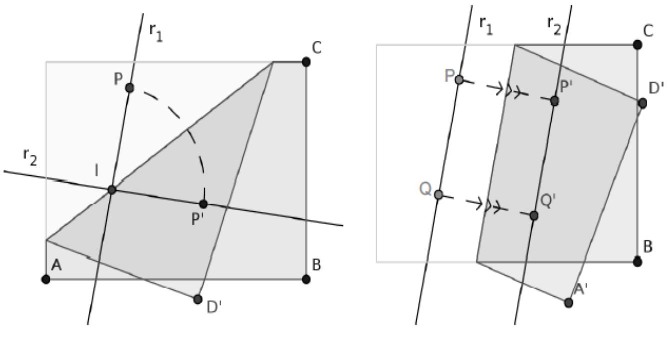
1. **Dados dois pontos distintos P_1 e P_2, existe apenas uma dobra que passa por eles.**



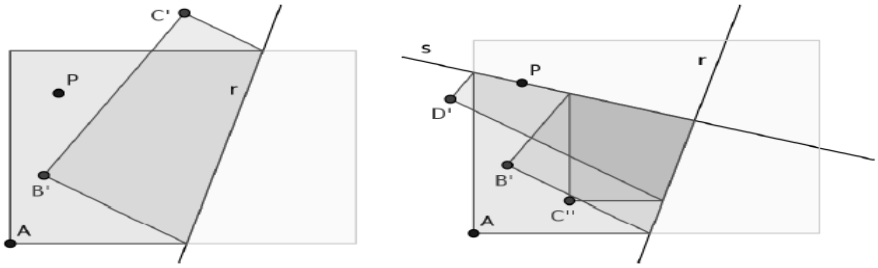
2. **Dados dois pontos distintos P_1e P_2, existe apenas uma dobra que coloca P_1 sobre P_2.**



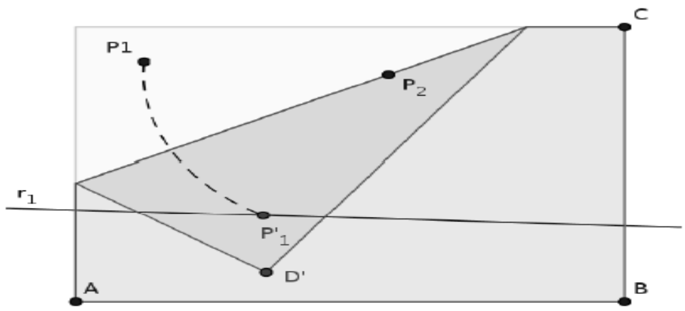
3. **Dadas as retas r_1 e r_2, existe uma dobra que coloca r_1 sobre r_2.**



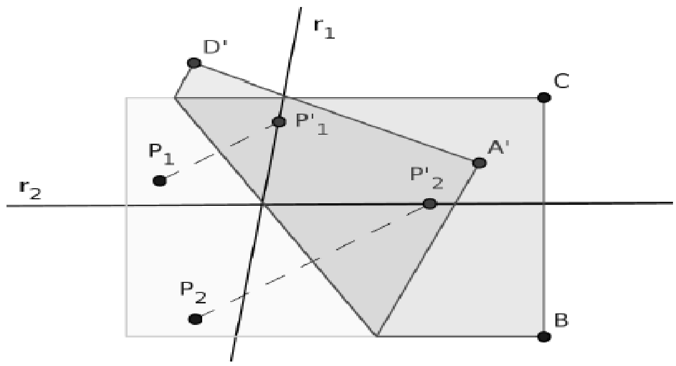
4. **Dados um ponto P e uma reta r, existe uma dobra única que é perpendicular a r e que passa por P.**



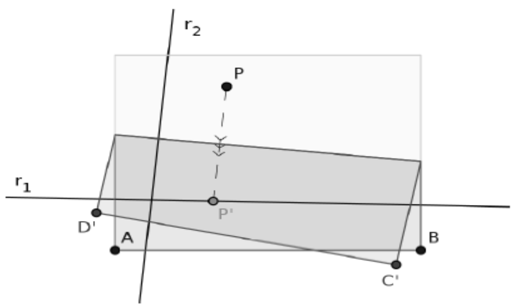
5. **Dados dois pontos P_1 e P_2e uma reta r_1, existe uma dobra que coloca P_1 sobre r_1 e que passa por P_2.**



6. **Dados dois pontos P_1 e P_2 e duas retas r_1 e r_2, existe uma dobra que leva simultaneamente P_1 sobre r1 e P_2 sobre r_2.**



7. **Dados um ponto P e duas retas r_1 e r_2, existe uma dobra que coloca P_1 sobre r_1 e que é perpendicular a r_2.**



Construção dos Poliedros de Platão através do Origami

O *origami* utilizado como um possível recurso didático pode despertar a motivação do estudantes em relação a dobraduras, em atividades manuais, onde os mesmos são levados a observar, manipular e construir. Para a construção dos poliedros de Platão serão utilizados módulos de polígonos regulares, que são eles:
triângulo equilátero, quadrado e pentágono, confeccionados através de origami.

História do Origami

Segundo Cavacami e Furuya, 2012, as primeiras aplicações da Geometria de que se tem notícia apareceram em problemas relacionados com divisão de suas terras e na Astronomia. Desde então o uso da Geometria é uma constante na vida do homem e hoje o seu estudo é inserido no ensino da Matemática desde os primeiros anos escolares. A aplicação de Origami no ensino da Geometria pode auxiliar no desenvolvimento cognitivo, trazendo assim uma melhor aprendizagem e compreensão da Matemática através da manipulação de um simples pedaço de papel.

O Origami, de origem desconhecida, tem etmologia japonesa e significa dobrar (ori) papel (kami). No Brasil, utiliza-se também a palavra dobradura, mas o termo Origami é mundialmente reconhecido e utilizado. O origami pode ser classificado em tradicional, o qual utiliza uma única folha de papel, e o modular, que é baseado na construção de módulos (ou unidades), os quais posteriormente serão encaixados formando figuras. O origami modular é o mais utilizado para construção dos poliedros.

REFERÊNCIAS

BORDEAUX, A. L et al. Matemática na vida e na escola. São Paulo: Editora Brasil, 1999.

BORTOLOSSI, H.J. Cristais na forma de sólidos platônicos. CDEME- Conteúdos digitais para o ensino e aprendizagem de matemática e estatística, UFF. Disponível em http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html. Acesso em: 10 de ago. 2014.

CARVALHO, P. C. P. Introdução à geometria espacial. 4ª. ed. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 1999.

CAVACAMI, E; FURUYA, Y. K. S. Explorando Geometria com Origami. Programa de Iniciação Cientiífica OBMEP, vol.11, p. 5, 2012.

CORREIA, A. M. A.; FERREIRA, B. L. Poliedros platônicos: dualidade simétrica. Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Expressão Gráfica. Curitiba, p, 2, 2007.

Imagens. Disponível em:<https://www.google.com.br/search?q=meninos&source>. Acesso em: 16 jul. 2014.

REIS, E. A. Os poliedros de Platão. Universidade Federal de Sergipe. Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional (PROFMAT). Sergipe, p. 23 , 2013.

APÊNDICE F –TESTE DE SONDAGEM

<u>TESTE DE SONDAGEM</u>

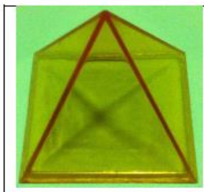
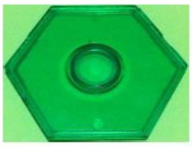
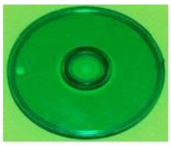
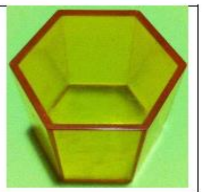
INSTRUÇÕES:

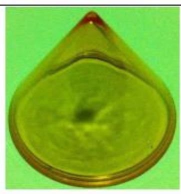
- Não abra este caderno de questões até que isso lhe seja solicitado.
- Este Teste de Sondagem contém 15 questões de Geometria.
- Guarde todo seu material escolar. O lápis, borracha e a caneta que você recebeu junto com este caderno de questões serão os únicos objetos permitidos.
- Quando lhe for solicitado que comece este teste, siga as instruções que se seguem:
    - Leia atentamente cada questão;
    - Decida qual resposta você acredita estar correta. Use o próprio caderno de questões para efetuar qualquer cálculo ou desenho que julgar lhe ser útil;
    - Não é permitida a comunicação entre alunos;
    - Você terá 50 minutos para fazer este teste.

Espere até seu professor dizer que você pode começar

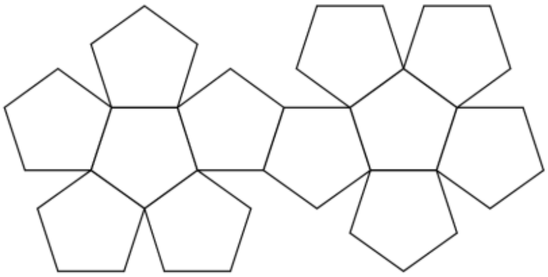
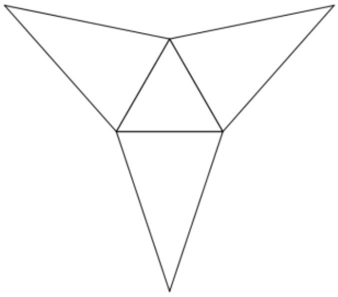
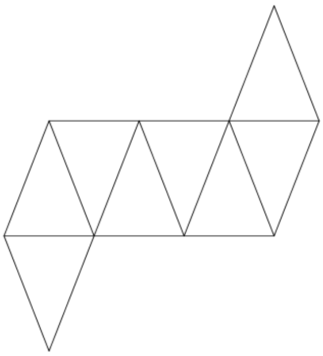
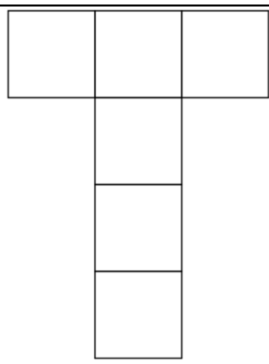
Nome: ___________________________________ **Turma:**_________ **Idade:**_____

1. Classifique as figuras a seguir como planas ou espaciais:

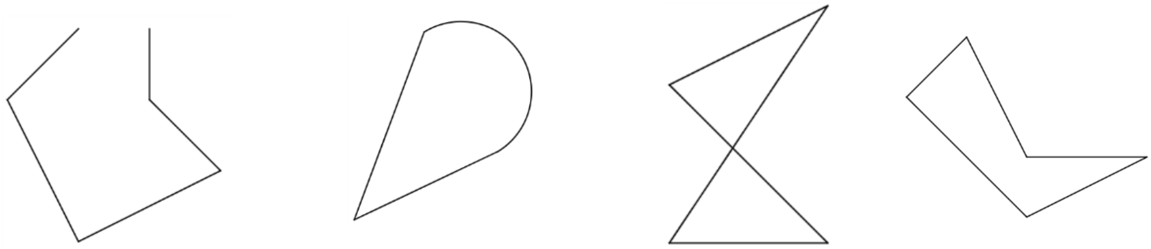
			

2. Nas planificações a seguir, identifique aquelas que correspondem a poliedros de Platão:

( ) 	( ) 
( ) 	( ) 

3. Nas figuras abaixo, identifique aquelas que podem ser consideradas como polígonos marcando um X:



( ) ( ) ( ) ( )

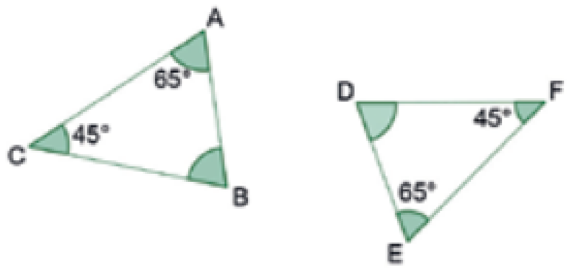
4. Analisando os triângulos a seguir, pode-se dizer que os triângulos são:

a) congruentes.

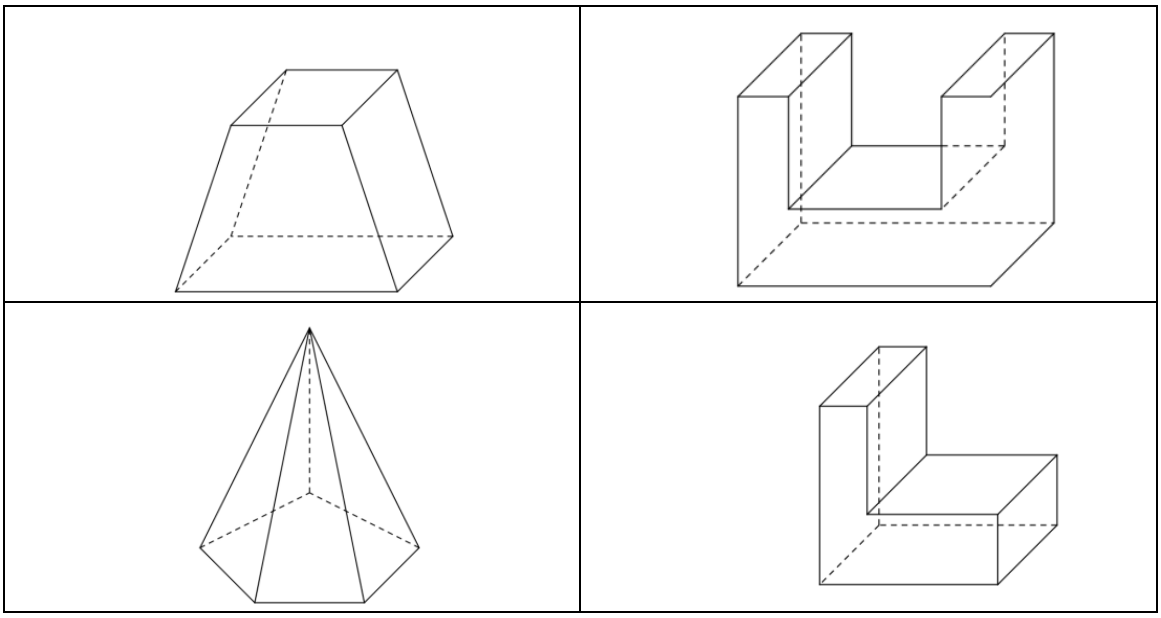
b) eqüiláteros.

c) isósceles.

d) retângulos



5. Identifique as figuras a seguir como poliedros convexos ou poliedros não convexos:



Básico:	**S**
	N

Nome: ___________________________________ Turma:_________ Idade:_____

1. Assinale a alternativa INCORRETA:

a) Um polígono é formado apenas por segmentos de retas.

b) Todo polígono é uma figura plana fechada.

c) O número mínimo de lados de um polígono é três.

d) Existe um polígono com dois lados.

2. Associe corretamente as colunas abaixo, sabendo que há apenas um item para cada propriedade da coluna da direita:

(A) Poliedro	( ) Todas as faces possuem o mesmo número de arestas, todos os ângulos poliédricos possuem o mesmo número de arestas e se enquadram na relação de Euler.
(B) Polígono	( ) Os ângulos e lados são iguais.
(C) Poliedro de Platão	( ) Apresenta figuras geométricas formadas por três elementos básicos: vértices, arestas e faces.
(D) Polígono Regular	( ) É uma região plana limitada por uma linha poligonal fechada.

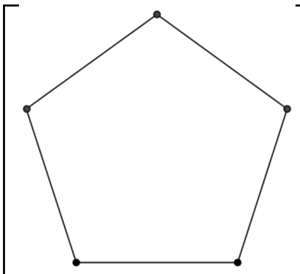
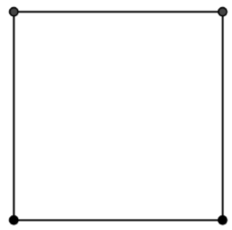
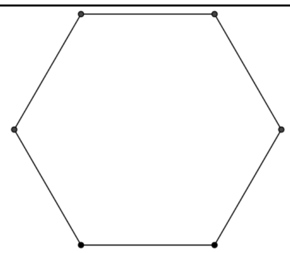
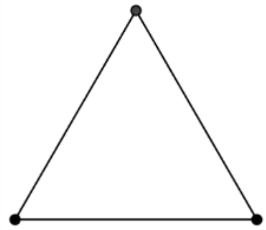
3. Quantos eixos de simetria existem na figura abaixo?

4. São poliedros platônicos:
   a) ( ) Heptaedro, Nonaedro, Pentaedro
   b) ( ) Monoedro, Biedro, Quadriedro
   c) ( ) Hexaedro Regular, Octaedro Regular, Icosaedro Regular

d) ( ) Tripliedro, Concaedro, Tresaedro

e) ( ) Todas as alternativas anteriores estão corretas.

5. Divida corretamente os polígonos abaixo em triângulos, a partir de um único vértice e, em seguida, escreva a quantidade de triângulos obtidos.

Nível 1: **S**

N

Nome: ___________________________________ Turma:_________ Idade:_____

1. Classifique corretamente as afirmações abaixo em Verdadeiras (V) ou Falsas (F):

a) Todo poliedro de Platão é um poliedro regular. ( )

b) Se um poliedro é regular então ele é convexo. ( )

c) Caso um poliedro seja não convexo então ele não é um poliedro de Platão. ( )

d) Existe poliedro de Platão que é não convexo. ( )

2. Classifique em Verdadeiro (V) ou Falso (F)?

( ) Todo quadrado é losango.	( ) Todo paralelogramo é quadrado.
( ) Todo quadrado é retângulo.	( ) Todo retângulo é paralelogramo.
( ) Todo losango é retângulo.	( ) Todo losango é quadrado.
( ) Todo retângulo é quadrado.	( ) Todo paralelogramo é retângulo.
( ) Todo quadrado é paralelogramo.	( ) Todo retângulo é losango.

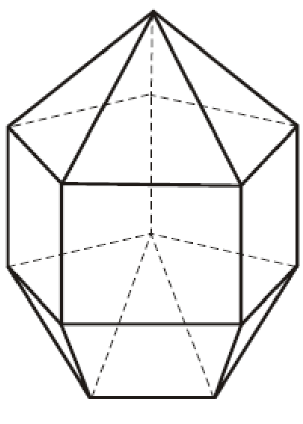
3. Observando a figura, determine o nº de faces, o nº de arestas e o nº de vértices do poliedro convexo. E responda se ele satisfaz a relação de Euler .

____ Faces

____ Arestas

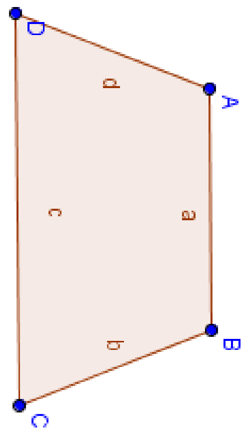
____Vértices

Satisfaz a relação de Euler: ( )Sim ( ) Não



4. Determine qual é o poliedro convexo que tem 6 vértices e 12 arestas.

5. Observe a figura e responda:



a) Existem lados opostos paralelos?

   Quais são esses lados?

b) Qual o nome desse quadrilátero?

Nível 2:	**S**
	N

ANEXOS

ANEXO A – TESTE DE VAN HIELE

TESTE DOS NÍVEIS DE VAN HIELE

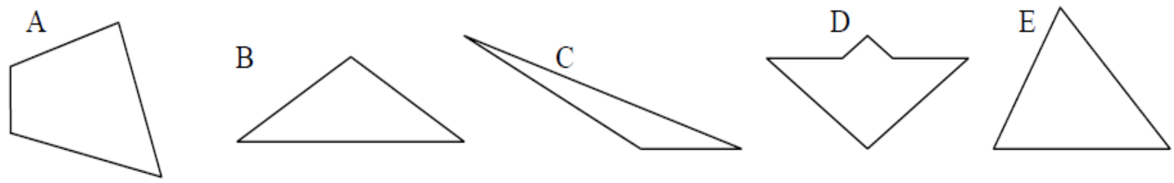
INSTRUÇÕES:

- Não abra este caderno de questões até que isso lhe seja solicitado.
- Este Teste de van Hiele contém 15 questões de geometria.
- Guarde todo seu material escolar. O lápis, borracha e a caneta que você recebeu junto com este caderno de questões serão os únicos objetos permitidos na realização deste teste.
- Quando lhe for solicitado que comece este teste, siga as instruções que se seguem:
    - Leia atentamente cada questão;
    - Decida qual resposta você acredita estar correta. Apenas as questões **7, 9, 10, 12** e **13** que não são de múltipla escolha;
    - Use o próprio caderno de questões para efetuar qualquer cálculo ou desenho que julgar lhe ser útil;
    - Não é permitida a comunicação entre alunos;
    - Você terá 50 minutos para fazer este teste.

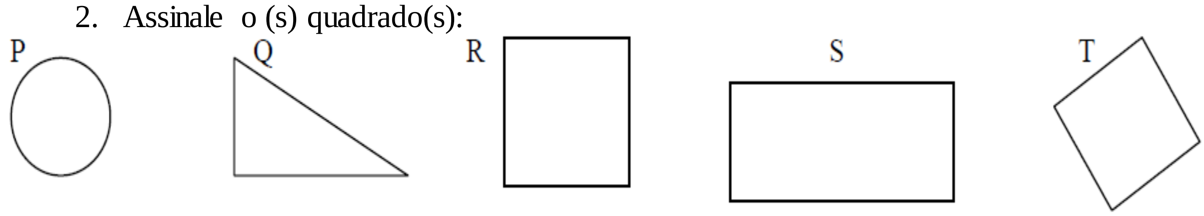
Espere até seu professor dizer que você pode começar

Nome: ________________________________ **Turma:**_________ **Idade:**_____

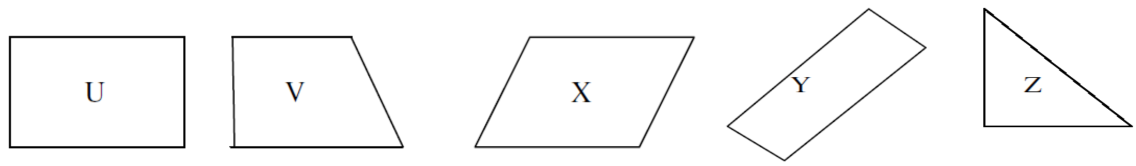
1. Assinale o(s) triângulo (s):



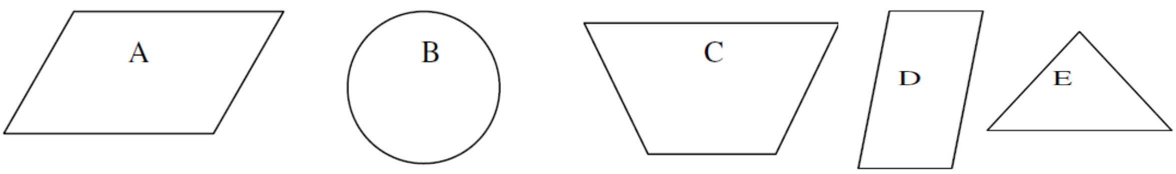
2. Assinale o (s) quadrado(s):



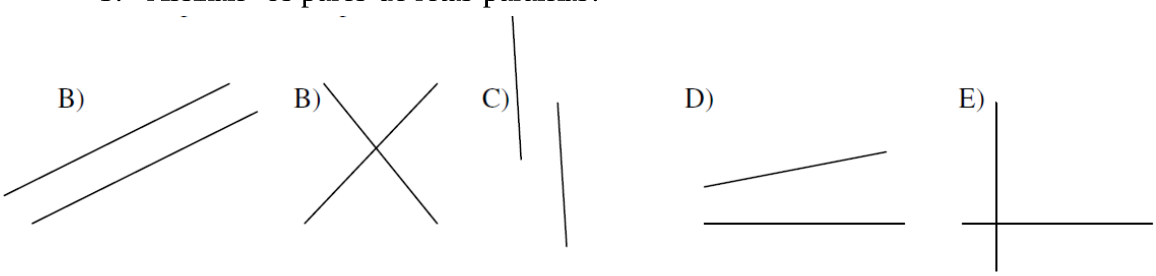
3. Assinale o (s) retângulo (s):



4. Assinale o(s) paralelogramo (s):



5. Assinale os pares de retas paralelas:

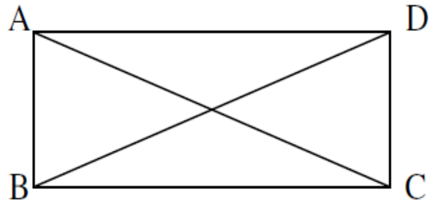


Básico: **S**

N

Nome: ___________________________________ **Turma:**_________ **Idade:**_____

6. No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas de diagonais. Assinales a (s) alternativa (s) verdadeira (s) para todos os retângulos:



a) Tem 4 ângulos retos.

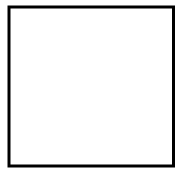
b) Tem lados opostos paralelos.

c) Tem diagonais de mesmo comprimento.

d) Tem os lados iguais.

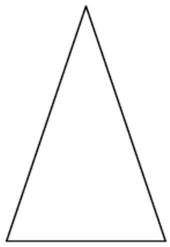
e) Todas são verdadeiras.

7. Dê três propriedades dos quadrados:



   1. ______________________________
   2. ______________________________
   3. ______________________________

8. Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais. Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles:



a)Pelo menos um dos ângulos mede 60º.

b)Um dos ângulos mede 90º.

c)Dois ângulos têm a mesma medida.

d)Todos os três ângulos tem a mesma medida.

e)Nenhuma das afirmativas é verdadeira.

9. Dê três propriedades dos paralelogramos:

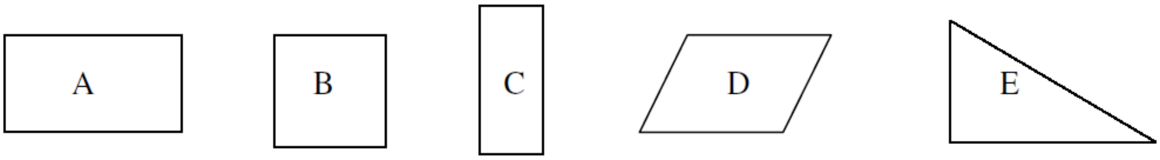
   1. ______________________________
   2. ______________________________
   3. ______________________________

10. Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais não tem o mesmo comprimento. Desenhe este quadrilátero.

Nível 1:	**S**
	N

Nome: ___________________________________ **Turma:**_________ **Idade:**_____

1. Assinale a(s) figura(s) que pode (m) ser considerada (s) retângulo (s):



2. Os quatro ângulos A,B, C e D de um quadrilátero ABCD são todos iguais.

   a)Pode-se afirmar que ABCD é um quadrado?__________________________

   b)Por quê?____

   c) Que tipo de quadrilátero é ABCD?_________________________________

13. Pode-se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo? _______Por quê?____

14. Considere as afirmativas:

(I) A figura X é um retângulo.

(II) A figura X é um triângulo.

Assinale a afirmativa verdadeira:

(a) Se I é verdadeira, então II é verdadeira.

(b) Se I é falsa, então II é verdadeira.

(c) I e II não podem ser ambas verdadeiras.

(d) I e II não podem ser ambas falsas.

(e) Se II é falsa, então I é verdadeira.

15-Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados:

(a) Qualquer propriedade dos quadrados é também válida para os retângulos.

(b) Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos retângulos.

(c) Qualquer propriedade dos retângulos é também válida para os quadrados.

(d) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados.

(e) Nenhuma das afirmativas anteriores.

Nível 2:	**S**
	N

ANEXO B – ATIVIDADE: QUEM SOU EU?

Faça um desenho de acordo com as propriedades citadas e identifique o quadrilátero em cada item.

1) Quem sou eu? ______________________

- Sou um quadrilátero que tem pelo menos um ângulo que não é reto.
- Pelo menos um lado é paralelo a seu lado oposto.
- Os lados opostos são congruentes.

2) Quem sou eu? ______________________

- Sou um quadrilátero que tem os ângulos opostos iguais.
- Os quatro lados são congruentes.
- Pelo menos um ângulo é reto.

3) Quem sou eu? ______________________

- Sou um quadrilátero que tem pelo menos um ângulo agudo.
- Os lados opostos são congruentes.

4) Tenho somente um par de lados paralelos.

Quem sou eu? ______________________

5) Agora é você que vai dar as dicas para que seus colegas de grupo desenhem um quadrilátero. Pense em um quadrilátero e escreva as características no espaço abaixo.

6) Veja a descrição dos seus colegas de grupo e faça os desenhos correspondentes no espaço abaixo.