

INSTITUTO FEDERAL DE MINAS GERAIS
CAMPUS SÃO JOÃO EVANGELISTA

Edna da Conceição Linhares Araújo

Júnia Audenice Oliveira

Kelly Letícia Andrade Viana Gonçalves

**A REPRESENTAÇÃO PICTÓRICA COMO ELEMENTO PARA A PRÁTICA
PEDAGÓGICA EM MATEMÁTICA: APONTAMENTOS TEÓRICOS E
METODOLÓGICOS.**

São João Evangelista
2013

Edna da Conceição Linhares Araújo
Júnia Audenice Oliveira
Kelly Letícia Andrade Viana Gonçalves

**A REPRESENTAÇÃO PICTÓRICA COMO ELEMENTO PARA A PRÁTICA
PEDAGÓGICA EM MATEMÁTICA: APONTAMENTOS TEÓRICOS
METODOLÓGICOS.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto
Federal de Minas Gerais – Campus São João
Evangelista como requisito para obtenção do título
de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. José Fernandes da Silva

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pelo Serviço Técnico da Biblioteca do
Instituto Federal Minas Gerais – Campus São João Evangelista

G635r GONÇALVES, Kelly Leticia Andrade Viana , 1990-

A representação pictórica como elemento da prática pedagógica em matemática: apontamentos teóricos e metodológicos./ Edna da Conceição Linhares; Júnia Audenice Oliveira; Kelly Leticia Andrade Viana Gonçalves. São João Evangelista, MG: IFMG - Campus São João Evangelista, 2013.

61 p.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso - TCC (graduação) apresentado ao Instituto Federal Minas Gerais – Campus São João Evangelista – IFMG, Curso de Licenciatura em Matemática, 2013.

Orientador: Prof. Me. José Fernandes da Silva

1. Educação Matemática. 2. Prática Pedagógica. 3. Matemática. 4. Estudo e Ensino. I. Instituto Federal Minas Gerais – Campus São João Evangelista. Curso de Licenciatura em Matemática. II. Título.

CDD 510.1

Edna da Conceição Linhares Araujo
Júnia Audenice Oliveira
Kelly Leticia Andrade Viana Gonçalves

A representação pictórica como elemento para a prática pedagógica em Matemática: apontamentos teóricos metodológicos.

Trabalho de conclusão de curso apresentada como exigência parcial para obtenção do título de **Licenciado (a)(s) em Matemática** à Banca Examinadora do Instituto Federal de Minas Gerais - *Campus* São João Evangelista.

Aprovada em 05 / 11 / 2013.....

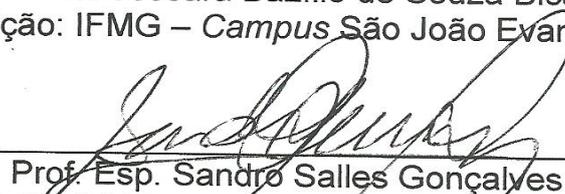
BANCA EXAMINADORA



Orientador Prof. Me. José Fernandes da Silva
Instituição: IFMG – *Campus* São João Evangelista



Prof^a. Ma. Jossara Bazílio de Souza Bicalho
Instituição: IFMG – *Campus* São João Evangelista



Prof. Esp. Sandro Salles Gonçalves
Instituição: IFMG – *Campus* São João Evangelista



Aos que, pacientemente, contribuíram para a construção deste trabalho.

Em especial às colegas de grupo Júnia Audenice e Kelly Letícia; e ao Prof. Me. José Fernandes.

Edna Linhares

À minha mãe Antônia, pelo incentivo.

Ao meu namorado Felipe, pelo carinho.

Aos meus irmãos, pelo apoio.

Aos meus sobrinhos, pelo aconchego de suas inocências.

Júnia Audenice

Aos meus familiares, pelo apoio, incentivo e compreensão.

Em especial ao meu marido, Vanderlei, pela compreensão e cuidado;

A minha mãe, Claudeth, por me acompanhar e incentivar em todos os momentos delicados da minha vida.

Kelly Letícia

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela saúde, força e perseverança durante essa caminhada de quatro anos que se finda com a realização deste sonho.

Ao professor Me. José Fernandes, por ter acompanhado, orientado, norteado nossos trabalhos com sua sabedoria e bom humor e ter compreendido os momentos de dificuldades enfrentadas pelo grupo.

Ao professor Esp. Sandro Gonçalves e à professora Me. Jossara Bicalho, componentes da banca, pelas contribuições e observações na construção e aprimoramento deste trabalho.

Aos demais professores colaboradores, não só pela construção de nosso perfil profissional como também pessoal.

Aos familiares, pela paciência, compreensão e parceria nos momentos em que não estivemos presentes.

Aos nossos “amores”, todo nosso apreço e gratidão pela força nos momentos em que nos deram colo e nos fizeram sorrir quando estivemos tão cansadas.

Aos amigos de faculdade, pelos momentos inesquecíveis que vivemos juntos nestes quatro anos de estudo.

Às instituições educacionais, com toda a sua comunidade escolar que nos deram aporte para a vivência da prática docente que guiaram nossas pesquisas.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para que pudéssemos chegar até aqui, deixamos nosso carinho e eterna gratidão.

As pesquisadoras.

RESUMO

O presente trabalho, de cunho qualitativo e bibliográfico, discute as concepções e contribuições da representação pictórica, enquanto elemento para a prática pedagógica em Matemática, no viés da resolução de problemas. A pesquisa objetivou, através de um levantamento em literaturas em educação matemática, verificar as possibilidades e contribuições das representações, em especial a representação pictórica na prática docente. Enquanto a representação pictórica se constitui em uma linguagem de comunicação e de expressão baseada em desenhos, gráficos, tabelas e outras formas de representação visual, a prática pedagógica em matemática exige elementos diversos na sua constituição. Nesse sentido, buscar estratégias para a resolução de diferentes problemas se constitui em tarefa necessária ao professor mediador. O aluno, ao ser desafiado por um problema, busca propriedade em seu discurso de resposta e a representação pictórica agencia esse processo de investigação. Assim, a reflexão em torno do objeto em análise é subsidiada por teóricos que realizaram pesquisas valendo-se das representações gráficas e semióticas. Os estudos apontaram a viabilidade das representações pictóricas na comunicação e expressão dos conhecimentos matemáticos e na construção significativa das habilidades cognitivas nesta área. Observou-se que tal recurso ainda é pouco utilizado pelos docentes que, de acordo com as literaturas pesquisadas, desconhecem em suas práticas pedagógicas.

Palavras-Chave: Representação Pictórica; Representação; Prática Pedagógica de Matemática.

ABSTRACT

This study, a qualitative and bibliographic discusses the concepts and contributions of pictorial representation as an element for pedagogical practice in mathematics in problem solving bias. The research aimed, through a survey of literature in mathematics, check out the possibilities and contributions of the representations and pictorial representation in the teaching practice. While the pictorial representation constitutes a language of communication and expression based on drawings, graphs, charts and other forms of visual representation, pedagogical practice in mathematics requires many elements in its constitution. In this sense, seek strategies to solve different problems, constitutes the necessary task facilitator. The student, when challenged by a problem, search property in his speech response and pictorial representation agency this research process. Thus, the reflection on the object in question is subsidized by theorists who conducted research making use of graphical representations and semiotic. The studies showed the feasibility of pictorial communication and expression in mathematical knowledge and building significant cognitive skills in this area. It was observed that this feature is still little used by teachers, which according to the literature surveyed are unaware of these in their teaching practices.

Keywords: Pictorial Representation, Representation, Teaching Practice of Mathematics.

SUMÁRIO

| | |
|--|------------|
| 1. INTRODUÇÃO | 9 |
| 2. CONCEITUANDO RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS..... | 12 |
| 3. LEVANTAMENTO TEÓRICO..... | 18 |
| 3.1 A Representação | 18 |
| 3.2 Representação Pictórica..... | 24 |
| 4. REPRESENTAÇÃO PICTÓRICA: PERSPECTIVAS, ESTUDOS E PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. | 29 |
| 5. CATEGORIZAÇÃO DOS ESTUDOS EM REPRESENTAÇÕES..... | 41 |
| 5.1 Números e Operações..... | 433 |
| 5.2 Espaço e Forma..... | 477 |
| 5.3 Grandezas e Medidas | 49 |
| 5.4 Tratamento da Informação | 50 |
| 6. PERCURSO METODOLÓGICO | 51 |
| 6.1 As pesquisadoras | 51 |
| 6.2 Procedimentos metodológicos..... | 52 |
| 7. CONSIDERAÇÕES FINAIS..... | 54 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 577 |

1. INTRODUÇÃO

O presente estudo tem suas origens nas vivências do Curso de Licenciatura em Matemática. Em uma aula de Resolução de Problemas I, no 3º período de Licenciatura em Matemática, do Instituto Federal de Minas Gerais, *campus* São João Evangelista, foi sugerido pelo professor da disciplina, a resolução de alguns problemas matemáticos. Em primeiro instante, houve grandes dificuldades pelos discentes, porém após uma aluna (integrante do grupo de pesquisa) esquematizar a situação proposta e lançar a ideia à turma, a maioria dos alunos conseguiu entender as informações contidas e concluir a resolução. A aluna então questionou ao professor sobre o esquema ou desenho como facilitador na compreensão e resolução de problemas, surgindo o interesse em pesquisar o tema. A partir de então, decidiu-se investigar o tema e verificar sua relevância no ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Tendo em vista que, desde o primeiro semestre do curso, todos os trabalhos realizados em grupos eram realizados pelo trio de pesquisa, o interesse pelo tema foi compartilhado. Visto isso, o professor da disciplina (Resolução de Problemas I) e orientador deste trabalho propôs a leitura do livro *Ler, Escrever e Resolver Problemas: Habilidades Básicas para aprender matemática*. No livro, organizado por Kátia Smole e Maria Ignez Diniz e publicado em 2001, as autoras afirmam que, através de situações, a representação pictórica auxilia no processo de ensino-aprendizagem. Mediante o fato, o grupo decidiu pesquisar sobre a utilização da representação pictórica no ensino de matemática e percebeu, a partir de levantamentos teóricos, que não existem muitos trabalhos acerca do assunto.

A partir do supracitado, as pesquisadoras iniciaram a busca constante por teóricos que balizassem tal assunto. Ao definir os estudos para a monografia, orientandas e orientador chegaram ao consenso que buscariam realizar o estudo tendo a seguinte questão norteadora: a representação pictórica pode ser considerada uma ferramenta que auxilia ao ensino-aprendizagem na prática pedagógica em matemática?

Assim, o interesse primordial em discutir o tema advém da busca pela inovação nos métodos de ensino-aprendizagem de matemática na Educação Básica. O aluno necessita compreender as entrelinhas que as informações matemáticas podem apresentar em situações-problema, resolvendo com mais clareza e objetividade. Sendo uma linguagem de comunicação baseada em desenhos, gráficos, tabelas e outras formas de representação visual, a representação pictórica apresenta-se como estratégia de solução de problemas. A partir desse momento, o discente passa a se capacitar para a retirada das informações contidas

nesses contextos, transformando-as em figuras, rabiscos e rascunhos pictóricos. Acredita-se que as mesmas vão se tornando mais perceptíveis aos alunos, ao passo que atividades meramente algorítmicas e de memorização ou “decoreba” não facilitam a interpretação da matemática.

Mediante o exposto e com base nas experiências vividas até então, na formação acadêmica, no Estágio Supervisionado, no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e também na prática docente, entende-se a necessidade de mudança no âmbito escolar. As práticas e os recursos do ensino tradicional não possibilitam, em sua totalidade, o desenvolvimento dos saberes dos estudantes e da aprendizagem concreta conforme defende Freire (1996). Percebe-se, ainda, que as situações-problema propostas no ensino memorístico e expositivo, quando apresentadas aos alunos, não são coerentemente descritas e as dificuldades apresentadas durante a resolução acentuam-se gradativamente.

Num mundo globalizado e repleto de informações, o sujeito em formação acadêmica necessita obter elementos precisos que não gerem desconforto e nem desestimulem o raciocínio ou poderá ocorrer a abnegação pelos estudos sistematizados.

Desta forma, a presente proposta de trabalho, que ressalta a representação pictórica como instrumento facilitador no ensino de matemática, originou-se de uma aula exploratória e investigatória com a apresentação de um problema e sua determinada solução.

Nesse sentido, objetiva-se verificar, em literaturas de Matemática, as possibilidades e contribuições da representação pictórica na prática docente, analisar a representação pictórica enquanto elemento facilitador nas aulas de Matemática, verificar o que se tem pesquisado acerca da representação pictórica e sua utilização em conteúdos matemáticos em nível internacional e evidenciar possibilidades e desafios da representação pictórica enquanto subsídio para a prática docente.

Face ao avanço e crescente emprego de instrumentos tecnológicos como celulares, *ultrabook*, *tablet*, *iPhone*, *notebook*, *iPad*, entre outros, exige-se muito mais da prática docente para a consolidação da aprendizagem pelo discente. Sendo assim, a aula memorística e expositiva, com aplicações de fórmulas, sem raciocínio lógico, apenas: “Usa isso e pronto!”, acarreta desinteresse mútuo por parte dos alunos e em decorrência, do professor. Nesta perspectiva, o processo de ensino é omitido ou ainda “transferido” aos discentes conforme defende Freire (1996), promovendo a prática de decorar fórmulas sem ao menos saber aplicá-las. A utilização da ferramenta pictórica na prática pedagógica de Matemática rompe paradigmas tradicionais, dinamiza aulas geralmente teóricas e promove o despertar do criticismo necessário à aprendizagem. Acredita-se que o aluno, ao ser desafiado por um

problema, busca propriedade em seu discurso de resposta e a representação pictórica agencia esse processo de investigação. Assim, a reflexão em torno do objeto em análise é subsidiada por elementos cognitivos que, através das representações, complementa as indagações realizadas acerca do processo de solução de um problema. Por hora, os estudos apontaram a viabilidade das representações pictóricas neste processo, pois favorecem a comunicação matemática e constituem-se num recurso facilitador à construção significativa do conhecimento.

Considerando esta introdução ao trabalho como primeiro capítulo, no capítulo 2, falar-se-á sobre o conceito de Resolução de Problemas e a proposta de utilizá-la como estratégia metodológica para ensino-aprendizagem matemática. A fim de subsidiar a compreensão da Resolução de Problemas, enquanto metodologia de ensino, pautou-se nessa tendência da Educação Matemática, visto sua gradual assistência no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Tendo em vista que resolver um problema não significa aplicar fórmulas para se chegar à resposta, é preciso desenvolver habilidades que permitam pôr à prova os resultados, testar seus efeitos e comparar diferentes caminhos para obter a solução.

No capítulo 3, abordar-se-á o levantamento bibliográfico acerca das representações e das representações pictóricas, no qual estas destacam a utilização de imagens, em geral, como ferramentas ilustrativas e esclarecedoras de informações contidas nas situações-problema. No capítulo 4, dando sequência à estrutura do trabalho, ressaltar-se-á as perspectivas, estudos e pesquisa em educação matemática, no qual se abordam os entrelaces entre os estudos nacionais e internacionais acerca da representação pictórica. Já no capítulo 5, a categorização é destaque nessa etapa, onde os trabalhos de autores renomados que falam sobre representação pictórica serão subdivididos de acordo com os tópicos dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). São eles Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. O capítulo 6 vem trazendo o passo a passo do percurso metodológico, explanando as informações sobre as experiências acadêmicas das pesquisadoras, e dos procedimentos metodológicos usados na pesquisa. Por fim, o capítulo 7 ressalta as considerações finais sobre o trabalho.

2. CONCEITUANDO RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A abordagem aqui explicitada tem o objetivo de subsidiar a compreensão da resolução de problemas enquanto metodologia de ensino, pois, foi feita a opção por conceber o trabalho dentro de uma tendência da Educação Matemática.

Com o objetivo de nortear a discussão, este capítulo visa a realização de um estudo sobre a resolução de problemas e a apresentação da perspectiva adotada para este trabalho.

A discussão em resolução de problemas surge, segundo Romanatto (2008), nos primórdios da história, quando o homem se deparou com situações inerentes à sua sobrevivência que, por sua vez, requeriam controle de informações e atitudes. Desta forma, o homem convive com o processo de resolver problemas em conformidade ao desenvolvimento de seu intelecto. Descartes (S.d.) *apud* Romanatto (2008) afirma que “... não nos tornaremos matemáticos, mesmo que decoremos todas as demonstrações, se o nosso espírito não for capaz, por si, de resolver qualquer espécie de problema”. Em outras linhas, ao deparar-se com novas situações, naturalmente, o homem consegue investigar situações passadas, construir estratégias de solução e pôr à prova suas aptidões de solucionar, criando assim um processo dinâmico de resolução.

Romanatto (2008) ainda assinala que o primeiro educador matemático a incentivar a resolução de problemas foi o húngaro Polya (1978), na primeira metade do século passado (a partir de 1950). De acordo com Polya (1978) citado por Romanatto (2008), a resolução de problemas deveria ser a essência da Matemática, e o objetivo primordial seria transformar os discentes em bons solucionadores de problemas.

No entanto Somle e Diniz (2001) ressaltam que foi nas décadas de 1980 e 1990 que este tema teve devida importância. Foi em 1980 que uma associação norte-americana (National Council of Teacher of Mathematics) reforçou indícios de ser a Resolução de Problemas o cerne das pesquisas da década. Estes estudos discutiam o conceito e concepções da resolução de problemas na época, que eram norteados em três perspectivas: “[...] meta, processo ou habilidade básica.”. Segundo as autoras, a meta “[...] pode ser simplificada como sendo a Resolução de Problemas o alvo do ensino de matemática”. O processo “[...] enfoca a Resolução de Problemas como processo de aplicar conhecimentos previamente adquiridos a situações novas”. E como habilidade básica tem-se que “[...] a Resolução de Problemas deve ser entendida como uma competência mínima para que o indivíduo possa inserir-se no mundo do conhecimento e do trabalho (SMOLE; DINIZ, 2001).

Nos anos 1990, a resolução de problemas agrega outra concepção. Smole e Diniz (2001) apontam que esta é “[...] descrita como uma metodologia para o ensino de matemática e, como tal, passando a ser um conjunto de estratégias para o ensino e desenvolvimento da aprendizagem de matemática”. Em relação à mesma década, Onuchic (1999) citado por Romanatto (2008) postula que “[...] um novo entendimento da resolução de problemas passou a ser divulgado na literatura sobre educação matemática, bem como, em propostas oficiais tanto do ensino fundamental como do ensino médio”. O autor ainda afirma ser esta proposta divergente dos ideais de Polya (1978), também citado por Romanatto (2008). As situações-problema apresentam-se como desafios que oportunizam construção e aquisição de conhecimento matemático e seus procedimentos.

Neste sentido, Smole e Diniz apontam suas concepções acerca da resolução de problemas:

[...] em nossa concepção, a Resolução de Problemas corresponde a um modo de organizar o ensino o qual envolve mais que aspectos puramente metodológicos, incluindo uma postura frente ao que é ensinar e, conseqüentemente, do que significa aprender. Daí a escolha do termo “perspectiva”, cujo significado “uma certa forma de ver” ou “um certo ponto de vista” corresponde a ampliar a conceituação de Resolução de Problemas como simples metodologia ou conjunto de orientações didáticas. Primeiramente a Resolução de Problemas baseia-se na proposição e no enfrentamento do que chamaremos de situação-problema. Isto é, ampliando o conceito de problema, devemos considerar que a Resolução de Problemas trata de situações que não possuem solução evidente e que exigem que o resolvidor combine seus conhecimentos e descida pela maneira de usá-los em busca de solução. Tal perspectiva rompe com a visão limitada de problemas que podem ser chamados convencionais e são os tradicionalmente propostos aos alunos (SMOLE; DINIZ, 2001, p.89).

Pode-se afirmar, também, que aprender a dar uma resposta correta pode ser suficiente para que ela seja aceita e até convincente, mas não é garantia de apropriação do conhecimento envolvido. No viés da Resolução de Problemas, o valor da resposta correta cede lugar ao valor do processo de resolução, como defende Polya (1978) citado por Pozo (1998), os passos possíveis para resolver um problema são: compreender o problema, conceber um plano, executar do plano, visão retrospectiva. Pozo ainda avalia:

Todos os professores acabam aprendendo que os problemas que expõem aos seus alunos em sala de aula podem diferir consideravelmente dos que eles próprios se colocam fora da classe. E mais, o que para nós pode ser um problema relevante e significativo pode resultar trivial ou carecer de sentido para nossos alunos. Obviamente, eles não têm os mesmos problemas que nós (POZO, 1998, p. 13).

Na concepção da Educação Matemática e suas tendências no século XXI, a prática pedagógica diferenciada, partindo da bagagem do aluno, dinamizando aulas geralmente

teóricas e tradicionais e utilizando ferramentas práticas para o ensino, promove o despertar do criticismo necessário à aprendizagem efetiva. Nesse sentido, Smole e Diniz afirmam que:

A predominância do silêncio, no sentido de ausência de comunicação ainda é comum nas aulas de matemática. O excesso de cálculos mecânicos, a ênfase em procedimentos e a linguagem usada para ensinar matemática são alguns dos fatores que tornam a comunicação pouco frequente ou quase inexistente. No entanto, em matemática, a comunicação tem um papel fundamental para ajudar os alunos a construir um vínculo entre suas noções informais e intuitivas e a linguagem abstrata e simbólica da matemática. Se os alunos forem encorajados a se comunicar matematicamente com seus colegas, com o professor ou com os pais, eles terão oportunidade para explorar, organizar e conectar seus pensamentos, novos conhecimentos e diferentes pontos de vista sobre um mesmo ponto de vista. Assim, aprender matemática exige comunicação, pois é através dos recursos de comunicação que as informações, os conceitos e as representações são veiculadas entre as pessoas (SMOLE; DINIZ, 2001, p.15).

Nessas condições, as linguagens de comunicação propiciam as trocas de ideias e de pensamentos matemáticos inerentes ao processo de ensino e aprendizagem, não só de Matemática, proporcionando o estreitamento das relações entre professor e alunos. Sendo assim, Freire (1996) aponta que: “[...] ensinar exige respeito à autonomia do educando”, característica esta responsável pela construção da personalidade do aluno enquanto cidadão ativo na sociedade. Para tal, Mendes alega que:

[...] a resolução de problemas pode ser tomada como uma das tendências metodológicas em Educação Matemática que pode contribuir amplamente para a formação de um aluno autônomo, consciente das possibilidades criativas que a Matemática lhe oferece, bem como das suas ações como cidadão. Outrossim, se essa capacidade criadora, emancipatória e cidadã não for estimulada nas atividades de resolução de problemas, certamente estaremos contribuindo para a exclusão do aluno desse processo emancipatório e cidadão (MENDES, 2009, p.80).

O acompanhamento por parte do professor mediador, através de comunicações didáticas, efetiva-se na dinamização das aulas e na construção do conhecimento, por parte do discente. Como defende Romanatto:

Estudantes que são bons solucionadores de problemas ficam atentos ao que estão fazendo e frequentemente analisam seus progressos ou ajustam suas estratégias enquanto encontram e resolvem problemas. Habilidades reflexivas (chamadas metacognição) são muito mais prováveis de serem desenvolvidas em um ambiente que as apoiem (ROMANATTO, 2008, p. 4).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), do ensino fundamental, da disciplina Matemática, apontam o valor da resolução de problemas como metodologia de ensino e aprendizagem de matemática. Focalizando-se a resolução de problemas, a proposta é que se considerem vários princípios. Em primeira instância, no processo de ensino e aprendizagem, os conceitos e as ideias matemáticas devem ser abordados mediante situações em que os alunos desenvolvam estratégias de resoluções. Também, o problema certamente não deve ser um exercício em que o aluno aplique mecanicamente fórmula ou processo operatório. As aproximações sucessivas aos conceitos matemáticos devem ser construídas para resolver certo tipo de problema. O aluno precisa utilizar o que aprendeu para resolver outras situações-problema, o que exige transferências, retificações, rupturas de ideias e dados. O aluno não deve construir conceitos em resposta a problemas, o conceito matemático deve ser construído em articulação a outros conceitos, por meio de retificações e generalizações. A resolução de problemas deve ser desenvolvida no sentido de orientação para a aprendizagem, pois proporciona um contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

Nesse sentido, os PCN's também indicam que na resolução de um problema pressupõe-se que o discente elabore um ou vários procedimentos de resolução, realize simulações, tentativas e hipóteses, compare resultados com os colegas, prove seus procedimentos, use figuras, diagramas e gráficos, tanto de forma analítica quanto intuitiva, expresse, à sua maneira, propriedades matemáticas, perceba padrões em situações aparentemente diversas, utilize casos mais simples para elaborar estratégias de resolução de casos mais complexos, elabore estratégias de solução a partir da análise crítica dos erros e utilize a simbologia matemática com variáveis e equações (BRASIL, 1997).

Mediante o exposto, resolver um problema, não significa aplicar fórmulas e conjecturas para se chegar à resposta. Além disso, é preciso desenvolver habilidades que permitam pôr à prova os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos, para obter a solução.

Similarmente aos PCN's (BRASIL 1997), o Currículo Básico Comum - CBC (MINAS GERAIS, 2006), documento da Secretaria Estadual de Educação de Minas Gerais, da disciplina de matemática, ressalta a essencialidade da aptidão de resolver problemas. Problemas tais, advindos ou não de situações concretas observáveis ou problemas interessantes que despertam a curiosidade dos alunos, podendo surgir do contexto matemático ou da modelagem deste, interligado à vida prática do discente em novas situações exploratórias e investigativas. O constante desenvolvimento das habilidades para a solução de

problemas deve ser hábito para o aluno e, este, estimulado pelo professor. Romanatto defende que:

Solucionar problemas não é apenas buscar aprender Matemática e sim fazê-la. Os estudantes deveriam ter oportunidades frequentes para formular, tentar e solucionar problemas complexos que requerem uma quantidade significativa de esforços e deveriam, então, ser encorajados a refletir em seus conhecimentos (ROMANATTO 2008, p.3).

Partindo-se desse princípio, pode-se considerar que a Resolução de Problemas aporta novas visões sobre a aplicabilidade das representações na vida prática do aluno. Como reafirmam Smole e Diniz:

Incentivar os alunos a buscarem diferentes formas de resolver problemas permite uma reflexão mais elaborada sobre os processos de resolução, sejam eles através de algoritmos convencionais, desenhos, esquemas ou até mesmo através da oralidade. Aceitar e analisar as diversas estratégias de resolução como válidas e importantes etapas do desenvolvimento do pensamento permitem a aprendizagem pela reflexão e auxiliam o aluno a ter autonomia e confiança em sua capacidade de pensar matematicamente (SMOLE; DINIZ, 2001, p.121).

Nessas condições, faz-se necessário a ruptura dos paradigmas educacionais presentes no ensino tradicional, no qual o aluno é mero receptor de informações, absorvendo-as como satisfatórias e aceitáveis e deixando de lado seu posicionamento enquanto sujeito participativo e crítico da sociedade na qual está inserido. Continuam Smole e Diniz:

O primeiro cuidado para romper com esse modelo de ensino centrado em problemas convencionais, de modo a evitar todas as dificuldades de aprendizagem ligadas a ele, é encarar os problemas-texto da perspectiva metodológica Resolução de Problemas, promovendo, mesmo para os problemas de quatro operações, um processo de investigação (SMOLE; DINIZ, 2001, p.100).

Paralelamente às discussões apresentadas, Romanatto (2008) afirma que “Os estudantes desenvolvem mais confiança e autoestima como solucionadores de problemas nas salas de aula em que eles têm um papel em estabelecer as regras da sala onde as ideias de todos são respeitadas e valorizadas”. Sendo assim, os professores em suas práticas pedagógicas, usando de variadas estratégias acerca dos conteúdos matemáticos via resolução de problemas, estimulam os discentes na formulação de suas próprias conjecturas e conclusões, facilitando a compreensão e resolução de situações-problema em matemática. Mendes também defende:

[...] uma perspectiva de desenvolvimento de atividades investigatórias no Ensino de Matemática como uma iniciação à pesquisa, visto que essa alternativa didática desenvolve agudamente a capacidade que o aluno tem para aprender o novo. Com isso ele passa da condição de um simples aluno para se constituir em um ser aprendente em contínuo desenvolvimento de habilidades inerentes à investigação do seu entorno, ou seja, passa a utilizar sua criatividade na busca de soluções para problemas que o circundam diariamente. Além disso, passa a ter habilidades de busca de conhecimento por si próprio, o que implica na tão desejada autonomia matemática (MENDES, 2009, p.81).

Deste modo, o papel e a postura do educador são fatores imprescindíveis no resultado almejado. Então, considerando os protótipos educacionais da disciplina Matemática, concebida por muitos como “difícil”, entende-se a necessidade de novas práticas docentes que associem os conteúdos explanados à realidade do aluno. Como afirma Freire (1996), “Ensinar exige risco, aceitação do novo e rejeição a qualquer forma de discriminação”. O autor destaca:

A grande tarefa do sujeito que pensa certo não é transferir, depositar, oferecer, doar ao outro, tomando como paciente do seu pensar, a intelegibilidade das coisas, dos fatos, dos conceitos. A tarefa coerente do educador que pensa certo é, exercendo como ser humano a irrecusável prática de entender, desafiar o educando com quem comunica, produzir sua compreensão do que vem sendo comunicado. Não há intelegibilidade que não seja comunicação e intercomunicação e que não se funde na dialogicidade. O pensar certo por isso é dialógico e não polêmico (FREIRE, 1996, p. 38).

Em consonância com o citado, tem-se que a metodologia de resolução de problemas rompe padrões educacionais presentes majoritariamente na avaliação como discorre D’Ambrósio:

[...] a avaliação deve ser uma orientação para o professor na condução de sua prática docente e jamais um instrumento para reprovar ou reter alunos na construção de seus esquemas de conhecimento teórico e prático. Selecionar, classificar, filtrar, reprovar e aprovar indivíduos para isto ou aquilo não são missão de educador (D’AMBRÓSIO, 1996, p.78).

Neste caso, a resolução de problemas destaca a importância do desenvolvimento de habilidades cognitivas do educando enquanto construtor de seu conhecimento matemático, a partir de informações visuais que permitem buscas próprias de estratégias que levem às respostas de inúmeras situações, não só acadêmicas, mas da vida prática.

3. LEVANTAMENTO TEÓRICO

Este capítulo tem como objetivo relatar estudos bibliográficos acerca do conceito de representação e representação pictórica. Estas serão utilizadas como forma de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. A base primordial destas representações concentra no uso de imagens, figuras, rabiscos que possivelmente facilitam a compreensão e resolução de problemas.

3.1 A Representação

Tomando como base as experiências do grupo de pesquisa, ressalta-se que o uso de representações no ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos é de extrema relevância para a compreensão e solução de problemas. Para isso, faz-se uso da resolução de problemas como estratégia metodológica no trabalho docente, no qual permite que o aluno realize simulações, faça tentativas e formule hipóteses utilizando seus próprios conhecimentos acerca do conteúdo. Contudo, a representação está aliada à resolução de problemas, assim como resolução de problemas ao ensino e aprendizagem, seja ela qual for à disciplina envolvida.

Segundo Ponte e Vélez (2011), a utilização de representações matemáticas vem tendo destaque nas investigações em Educação Matemática desde os anos 1980, visto que estas tem uma importância fundamental no raciocínio matemático, em particular no pensamento algébrico e geométrico. Diante do exposto, Medina, Liblik e Arsie (2001) dizem que “[...] o uso das imagens no ensino formal não é algo novo, pois no século XVII já se mostrava ao mundo as potencialidades da comunicação gráfica como uma eficiente forma de expressão”. O uso de representações, desenhos, gráficos, tabelas, desde as informais às mais formais, está presente no cotidiano dos alunos, tornando-se um método eficiente e coerente na resolução de situações-problemas matemáticos, mesmo que os alunos não cheguem à resposta correta somente pelo esboço da situação encontrada. Desta forma, Ponte e Vélez reforçam:

As representações utilizadas pelos professores podem ser um catalisador de uma discussão de idéias, que por sua vez, ao apresentarem as suas próprias representações, os alunos enriquecem as discussões, ao mesmo tempo em que fornecem ao professor um instrumento de avaliação do seu raciocínio (PONTE; VELEZ, 2011, p.179).

A utilização de representações, de um modo geral, é defendida por Couy e Frota como elemento de comunicação:

A comunicação através de gráficos é largamente utilizada no mundo de hoje para transmitir informações, pois permite sintetizar e organizar dados de maneira mais clara e eficaz do que, às vezes, um amontoado de palavras. A leitura gráfica exige entretanto o desenvolvimento da capacidade de percepção e de análise, pois não está restrita ao imediatamente perceptível, exigindo uma leitura que vai além das características visíveis (COUY; FROTA, 2007, p.4).

Pereira e Ponte (2011), em um dos seus trabalhos sobre representações, relatam que, em Portugal, um dos objetivos gerais do programa de Matemática do ensino básico foca a necessidade dos alunos compreenderem e saberem usar vários modelos de representações. Assim, os autores destacam que “as representações matemáticas desempenham um papel importante em toda a aprendizagem e o trabalho com os conceitos matemáticos mais importantes deve envolver, sempre que possível mais do que uma forma de representação”. Vergnaud (1998), por exemplo, apresenta razões distintas para que a representação seja utilizada na resolução de problemas. O autor descreve que, para o ser humano, um conjunto de imagens internas, gestos e palavras são representações. As palavras e símbolos utilizados para se comunicar não se referem diretamente à realidade, mas as representações de objetos, propriedades, relações, processos, ações e construções sobre as quais não existe um acordo automático entre duas pessoas (VERGNAUD, 1998, p. 167).

Deste modo, Duval (2004) defende que “não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer à noção de representação (...), pois não há conhecimento que um sujeito possa mobilizar sem uma atividade de representação”. Em paralelo, Goldin (2008) apresenta os construtos, desenvolvimento de estruturas e sistemas de representação como sendo de acentuada relevância para a aprendizagem matemática.

Diante do exposto, as representações podem ser consideradas como elemento crucial no ensino-aprendizagem, no desenvolvimento e na compreensão dos processos que envolvem o raciocínio dos alunos durante resolução de vários tipos de situações-problema, desde os algébricos aos geométricos. Contudo, o conceito de representação é complexo e deve ser visto de diversas formas. Como define Goldin, representar é atuar, ser interpretado, corresponder, denotar, descrever, encarnar, codificar, invocar, categorizar, ligar-se a algo, mediar, produzir, referir-se, assemelhar, servir como metáfora, significar, substituir, sugerir ou simbolizar o que está a ser representado (GOLDIN, 2008, p.181).

Dessa forma, Duval (2003) classifica os registros de representação em multifuncionais e monofuncionais e suas formas em discursiva e não discursiva. Os monofuncionais apresentam características formais ou tratamentos algoritmizáveis, uma fração por exemplo. Os multifuncionais são utilizados domínios culturais e sociais, como exemplo escrita em língua natural. Em continuidade, um registro de representação da forma discursiva, precisa permitir argumentações, deduções, escrita simbólica e a não-discursiva são as figuras geométricas e os gráficos cartesianos.

De acordo com estudos dos autores supracitados, as representações se dividem em duas categorias: as representações externas e internas. A primeira, como sendo registros semióticos; e a segunda, como representações mentais. Goldin (2008) estabelece os cinco itens para definir representações internas: (i) verbal e semântico; (ii) imagético; (iii) notação formal; (iv) planejamento, monitorização e controle de execução; (v) afetivo. Cada um destes sistemas produz diversas representações externas: (i) linguagem oral e escrita; (ii) gestos icônicos, desenhos, representações pictóricas, produções musicais ou rítmicas; (iii) fórmulas matemáticas e equações; (iv) expressões de objetivos, intenções, planejamento, estruturas de decisão; (v) contato visual, expressões faciais, linguagem corporal, contato físico, lágrimas, gargalhadas e exclamações que transmitem emoções.

Duval (2004, 2006) ressalta duas modificações de representações semióticas (representações externas): tratamentos e conversões. Tratamentos são mudanças de representação que ocorrem dentro de um mesmo registro, como o ato de resolver equações ou sistemas de equações utilizando cálculo e mantendo-se estritamente na mesma notação. Enquanto que as conversões são alterações de representação que consistem em transformar a representação de um objeto de um dado registro semiótico, numa outra representação do mesmo objeto de outro registro semiótico. São exemplos: a passagem de uma equação algébrica para a sua representação gráfica.

O mesmo autor ainda caracteriza registros semióticos de representação como constituindo “a margem de liberdade de um sujeito para objetivar ele mesmo uma ideia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar as informações ou, simplesmente, para comunicá-las a um interlocutor” (DUVAL, 2004; 2006).

Segundo Duval, os registros de representação semiótica são caracterizados por três atividades cognitivas: formação de representação identificável, quando se reconhece o que se representa no registro, tratamento que são transformações realizadas em sistemas de registros e a conversão onde se transforma uma representação matemática em outra.

Para Ponte e Oliveira, representar os seres humanos é traduzir a experiência num modelo de mundo, e tal situação pode ocorrer de três maneiras diferentes, sendo representações ativas, icônicas e simbólicas:

A primeira é através da ação. Conhecemos muitas coisas para as quais não há imagética nem palavras e é muito difícil ensiná-la através de palavras, diagramas ou imagens (...) Há um segundo sistema de representação que depende da organização visual ou outra organização sensorial e do recurso a imagens de resumo (...) A primeira forma de representação veio a ser designada como ativa e a segunda como icônica (...). Por fim, há a representação por palavras ou linguagem. O seu traço distintivo é ser simbólica por natureza (PONTE; OLIVEIRA, 2006-2011, p.4).

Desta forma, Duval (2003) destaca a necessidade de um ensino pautado nos registros de representação semiótica para a aprendizagem em matemática, visto que descrever, raciocinar e visualizar em matemática são atividades ligadas à utilização de registros semióticos.

Os avanços da psicologia cognitiva, conforme aponta Sternberg (2000), têm fornecido teorias que ajudam a compreender como as pessoas pensam, representam o conhecimento, formam imagens, solucionam problemas. Também, Viana (2007), afirma que as representações mentais são as “maneiras pelas quais o indivíduo torna presente no pensamento alguns aspectos do meio ambiente, sejam externos ou pertencentes ao seu próprio mundo imaginário”. Estas representações podem ser classificadas em dois grupos: as representações analógicas e as simbólicas. As analógicas tendem a ser imagens (visuais, auditivas, olfativas, tácteis ou cinéticas) enquanto que as simbólicas são semelhantes à linguagem. (VIANA, 2007).

No que diz respeito às representações externas, Cox (1999) citado por Viana (2007), afirma que são instrumentos úteis para o raciocínio, pois podem representar a informação do problema e também facilitar a mudança de estratégias de solução. Cada sujeito se diferencia no modo de externalizar sua situação perante a solução de um problema.

Em estudos feitos por Viana (2007) sobre as representações no ensino de geometria, percebe-se que problemas geométricos encontrados nos livros didáticos, nas questões de vestibulares, avaliações externas em geral, trazem as situações-problemas apresentadas na forma verbal, numérica e algébrica. Em muitas vezes, as soluções pedidas devem ser apresentadas na forma numérica e/ou algébrica e em poucas situações é solicitada uma solução pictórica. Para resolver tais problemas o aluno pode ou não usar uma representação externa. Essa representação externa pode ser um algoritmo de cálculo aritmético, um desenho, um diagrama que traduza o seu raciocínio perante aquela situação-problema. Viana continua:

Nas aulas de geometria, a experiência tem mostrado que o aluno produz representações externas pictóricas muitas vezes influenciadas pelas representações que o professor costuma externalizar na lousa enquanto soluciona os problemas para a classe (VIANA, 2007, p.6).

Couy e Frota (2007), em estudos sobre visualização e representação em funções, defendem que “[...] nos trabalhos desenvolvidos nas aulas de matemática, a representação através de figuras, gráficos, imagens e diagramas pode funcionar como meio para se chegar à solução de um problema, podendo ser também um objetivo educacional”.

A falta de estímulo ao se utilizar a representação durante o processo de solução de situações-problema pode advir da sua desvalorização, enquanto instrumento de análise dos processos cognitivos envolvidos na solução do problema, em avaliações e exercícios aos quais os alunos são submetidos.

Moretti (2007) concebe que ao longo do tempo, o uso de representações através de figuras, imagens e diagramas sempre foi membro da “construção da Matemática”, ou seja, artefato de se ensinar e aprender conteúdos matemáticos através da visualização do que se é pedido ou exposto. Assim, Guzmán citado por Couy e Frota afirma que:

A visualização foi a tônica geral do trabalho criativo dos matemáticos de todos os tempos. Um ou outro tipo de imagem acompanha constantemente suas especulações, [...]. A visualização, [...], ocupa um importante papel no desenvolvimento do pensamento matemático. Como tinha que ser, dada a natureza cognitiva do homem, tão condicionada pelos elementos visuais, intuitivos, simbólicos, representativos, e como corresponde à natureza da matemática e seus propósitos (GUZMÁN, 1996 *apud* COUY; FROTA 2007, p. 2).

O processo de visualização, a partir das representações, está inerente ao entendimento e compreensão de problemas, pois neste é possível que o aluno veja a que o problema está se referindo e faça uso do método de tentativa e erro, elaborando novas estratégias de solução diante do seu desenho, rabisco ou gráficos.

Deste modo, a visualização está presente em todos os campos do conhecimento. Costa citado por Couy e Frota, ao estudar as maneiras de pensamento geométrico ligados à visualização, identificou três formas diferentes (Tabela 1):

Tabela 1 – Modos de pensamento visual-espacial e respectivas definições.

| Modos de pensamento visual-espacial | Definição de cada modo de pensamento visual-espacial |
|--|---|
| Pensamento visual-espacial resultante da percepção (PVP), pensamento global. | Operações intelectuais sobre material perceptivo-sensorial, de memória. |
| Pensamento visual-espacial resultante da manipulação de imagens e da construção mental de relações entre imagens (PVM/PVR), pensamento dinâmico. | Operações intelectuais relacionadas com manipulação, transformações de idéias, conceitos e modelos. |
| Pensamento visual resultante da exteriorização do pensamento (PVE) | Operações intelectuais relacionadas com representação, tradução e comunicação de idéias, conceitos e métodos. |

Fonte: Costa (2002) *apud* Couy e Frota (2007).

Em discussão da tabela acima, Couy e Frota afirmam que:

A cada um desses modos de pensamento visual estão associados processos mentais. Intuições primárias, reconhecimentos visuais, utilização da memória (vivências anteriores), primeiras inferências intuitivas, por exemplo, são associados ao pensamento visual-espacial resultante da percepção (PVP). Abstração reflexiva, intuições secundárias, descoberta de relações, entre outros, são processos mentais associados ao pensamento visual-espacial resultante da manipulação de imagens e construção mental de relações entre imagens PVM/PVR. Os processos mentais de ações, representação e ligações entre representações de codificação e decodificação são exemplos de processos associados ao pensamento visual resultante da exteriorização do pensamento (PVE) (COUY; FROTA, 2007, p.4).

Apesar das contribuições que as representações, a partir da visualização, possam importar no método de ensino, Couy e Frota (2007) afirmam que “[...] na primeira metade do século XX, os processos de representação visual foram levados para segundo plano, sendo descartada sua contribuição na comunicação e compreensão dos conceitos matemáticos”. Couy e Frota (2007) continuam: “[...] esse acontecimento se deu pela influência *behaviorista* e às tendências formalistas do movimento conhecido como ‘Matemática Moderna’”.

As representações são elementos de suma importância no ensino-aprendizagem de Matemática, este método pode ser aplicado em diferentes disciplinas, visto que Santos e Greca (2005), em estudos sobre aprendizagem de conceitos e de representações em Química, afirmam que muitos estudantes têm dificuldade em compreender as representações que envolvem a disciplina. “As compreensões microscópica e simbólica são especialmente difíceis para os estudantes porque são invisíveis e abstratas e o pensamento dos alunos é construído sobre a informação sensorial” (SANTOS; GRECA, 2005).

Pesquisadores e educadores propõem, para superar as dificuldades dos alunos, abordagens instrucionais como: modelos físicos; desenhos estáticos e animações (dinâmicas e tridimensionais) criadas por ferramentas tecnológicas. Essas ferramentas ajudam os estudantes a aprender a utilizar representações microscópicas e simbólicas na descrição e explicação de processos químicos. De forma geral, os estudos relevam que o “uso de simulações computacionais produz uma significativa aprendizagem conceitual e uma apropriação representacional (simbólica e microscópica) por parte do estudante”, reafirma Santos e Greca (2005).

Contudo, diante das discussões sobre os benefícios que as representações causam no pensamento e raciocínio durante a resolução e compreensão de situações de diferentes conteúdos e modelos de conhecimentos, pode-se ainda definir a visualização e a resolução de problemas como critério para se desenvolver um efetivo ensino e aprendizagem. Posteriormente, veremos as representações pictóricas como instrumentos para construção do pensamento matemático.

3.2 Representação Pictórica

Mediante perspectivas atuais sobre novos métodos e estratégias para a construção do conhecimento matemático, sabe-se que toda disciplina tem um corpo de conhecimento e uma lógica peculiar específica. Diante disso, Romanatto (2011) diz ser a matemática uma das linguagens mais antigas e importantes para o desenvolvimento da espécie. Desde épocas remotas, os povos resolviam problemas do cotidiano, usando simbologia de elementos matemáticos, que satisfaziam e justificavam comportamentos e relações entre os grupos. De forma intuitiva, representavam pictoricamente o contexto matemático, como forma de controle dos recursos de sobrevivência, de prestação de contas. Considerando as representações pictóricas como uma linguagem de comunicação baseada em desenhos, gráficos, tabelas e todas as formas de representação visual, Romanatto (2011) ainda afirma que no passado atitudes representadas pictoricamente eram suficientemente fortes para demonstrar ou aferir o conhecimento de uma pessoa.

Desta forma, Sternberg (2000) avalia que “o desenho é uma forma de raciocinar sobre o papel”. E ainda Moreira (1984), citado por Smole e Muniz (2013), diz que “[...] o desenho é sua primeira escrita. Para deixar sua marca, antes de aprender a escrever, a criança se serve do desenho.” Sendo os desenhos a primeira linguagem da criança, o ato de desenhar facilita sua visualização, aproxima o que é abstrato a sua realidade. Sandes (2009) afirma que

“[...] a criança desde muito cedo utiliza o desenho como uma atividade que, na maioria das vezes, é prazerosa para ela”. Sendo assim, observa-se gradativa relevância de se analisar uma situação-problema, *a priori*, na forma de representações gráficas, a fim de facilitar a compreensão do proposto pelo problema. Contudo, Rabelo acredita que:

Talvez melhor fosse dizer que o indivíduo não devesse ser apenas alfabetizado, mas “letrado”. Mas o que seria, então, um sujeito “letrado”? É aquele que efetivamente tem sua vida social mediada pela leitura e escrita usando as diferentes linguagens das diversas áreas do nosso conhecimento, possuindo uma relação de autonomia e motivação com o meio escrito e dele efetivamente faz uso... (RABELO, 2002, p.24).

A falta de estímulo com que as crianças encaram a disciplina matemática, dentro da contextualização do conhecimento construído ao longo da vida acadêmica, muitas vezes se finda com inúmeros casos de falta de consonância e dúvidas referentes ao conteúdo. A apreensão do saber matemático interliga-se à prática docente, na vontade e segurança ao ministrar Matemática, visto que não se trata de uma matéria difícil e sim de uma disciplina que necessita ser construída junto aos alunos, com clareza e objetividade, ou o fracasso da maioria se torna fato para ambas as partes.

Ancorado em reflexões de Smole e Diniz (2001), a preocupação em apresentar um recurso didático que facilite a compreensão da Resolução de Problemas dentro da Matemática, relacionando-a com a vida prática do educando, deve ocorrer através da representação pictórica, ou seja, deve basear-se em figuras e desenhos que ilustram o contexto de um problema, facilita e torna mais acessível a apreensão do saber matemático. Continuam as autoras: “[...] o desenho é o pensamento visual e pode adaptar-se a qualquer natureza do conhecimento, seja ele científico, artístico, poético ou funcional”. Contudo, a criança desde seus primeiros anos de vida, se expressa através do desenho concreto, abstrato, colorido, escuro, enfim, transparece sua concepção do espaço imaginário ou real. Ao desenvolver-se, aprendendo a escrever, falar, ler e comunicar-se de outras formas, ainda possui algo que facilita seu entendimento e assim a construção do conhecimento: o desenho.

Desta forma, Viana afirma que:

As representações que podiam ser claramente interpretadas, que detalhavam uma seqüência dos processos de inspeção e transformação de imagens e que pareciam estar comprometidas com as estratégias de solução do problema foram chamadas de representações pictóricas externas completas. Quando as representações não eram apresentadas de forma a retratar a seqüência dos processos de manipulação de imagens, mostravam figuras ambíguas, pareciam incompletas ou não traduziam a lógica de solução, estas foram chamadas de representações pictóricas externas parciais (VIANA, 2007, p.16).

Enquanto esta criança desenvolve outras formas de comunicação, sua concepção também evolui e aquele desenho apresenta objetivo ampliado, que é a visualização de situações do texto para a mente. Em outras linhas, esse texto se faz mais concreto do que antes.

Complementando a ideia supracitada, a representação semiótica na Resolução de Problemas é delineada, segundo Lorenzatto e Fiorentini (2006), como “[...] a intervenção de registros gráficos na resolução de problemas geométricos pode ser incluída no âmbito mais amplo das ações voltadas ao entendimento do papel das linguagens e das representações gráficas utilizadas em matemática”. Também desenvolve Smole e Diniz (2001) que “[...] nas aulas de Matemática, o desenho serve como recurso de interpretação do problema e como registro de estratégia de solução”, portanto, a linguagem representativa semiótica, ou pictórica, intervém positivamente no processo de solução de um problema matemático, que agora visualizado pode ser entendido.

O processo de formação das imagens pode ser compreendido no campo visual como uma imagem única ou de múltiplas partes que irão compor a imagem final. Viana (2007) continua: “[...] mesmo quando a informação do problema é dada na forma pictórica, é necessário que o sujeito forme, a partir da percepção do desenho bidimensional, uma imagem tridimensional da figura e a configure no campo visual”.

Medina, Liblik e Arsie (2001) afirmam que o uso de imagens se mostra útil, pois oferece possibilidade de um modelo mental mais fiel à realidade, permitindo interação desta com outros temas e disciplinas, independente do conteúdo que se trabalha, pois as representações pictóricas estão presentes no cotidiano do aluno, em diferentes formas, em destaque na mídia e no cinema. É considerada por especialistas em educação como forma de comunicação e expressão. Essa comunicação visual e expressiva torna-se mais efetiva para uma melhor compreensão da matemática, apesar da língua verbal e escrita ser a mais utilizada em sala de aula, como afirma Garcia e Miskulin:

Uma imagem que pode ser utilizada para ensinar conceitos matemáticos abstratos ajuda a esclarecer e simplificar a aprendizagem de conceitos geométricos. A visualização é de fundamental importância na construção e exploração dos conceitos matemáticos (GARCIA; MISKULIN, 2006, p. 1).

No que tange ao ensino da matemática com foco na Resolução de Problemas, há necessidade de comparar tudo o que se tem registrado, até então, sobre os baixos índices e os déficits apontados nos resultados das avaliações propostas pelo governo, como afirma

D'Ambrósio (2011), que aponta os métodos e estratégias de ensino de matemática como principal fator da decadência do aluno. O autor afirma que devem ser considerados aspectos e temas de estudos de pesquisa que proponham novas metodologias aplicadas em sala, para que o aluno construa seus próprios meios e técnicas intuitivas, criativas, imaginárias de tentativas e erros para se chegar a um resultado, seja ele em que situação for, minimizando os problemas dados como falhas.

O que se deve ressaltar sobre a representação pictórica auxiliando a Resolução de Problemas é o alinhamento e a discussão acerca dos saberes prévios e fundamentais à prática de resolução. Nesse sentido, se comprovará a importância da mediação do professor que possibilita a produção e construção do próprio conhecimento e a decorrência significativa da formação do sujeito atuante na aquisição dos saberes. Saberes estes que, uma vez adquiridos, se fundam às habilidades do discente, propiciando a execução da aprendizagem independentemente do meio apresentado a ele. Em respeito ao fato, Freire (1996) diz que:

Ensinar não é transmitir conhecimento, conteúdos, nem formar é ação pela qual um sujeito criador dá forma estilo ou alma a um corpo indeciso e acomodado, não há docência sem discência, as duas se explicam e seus sujeitos, apesar das diferenças que os conotam, não se reduzem à condição de objeto um do outro (FREIRE, 1996, p. 25).

De modo simples, não se busca uma receita pronta e acabada para ensinar matemática e, em especial, para resolver problemas matemáticos. Muito mais que isso, acredita-se que através da resolução de problemas simples do cotidiano, é possível fazer despertar no sujeito habilidades que melhorem sua vivência. Vivência esta que, em caráter acadêmico facilite a solução dos problemas científicos que tanto aterrorizam e incapacitam brilhantes formadores ocultos, devido aos métodos de aprendizagem aos quais foram submetidos. Todavia, entende-se a necessidade das atividades, exercícios, oficinas, entre outras práticas docentes em matemática. Neste sentido, Ponte, Brocardo e Oliveira apontam que:

Não advogamos [...] que o professor se limite a propor aos seus alunos a realização de investigações. Há, sem dúvida, lugar para os exercícios, os problemas, os projetos e as investigações. O grande desafio é articular esses diferentes tipos de tarefas de modo a constituir um currículo interessante e equilibrado, capaz de promover o desenvolvimento matemático dos alunos com diferentes níveis de desempenho (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003, p.24).

Nessas condições, espera-se que o caminho da aprendizagem possa culminar na construção de conhecimentos sólidos, necessários à formação crítica do discente, onde o professor mediador auxilia a formalização de ideias e a autonomia do educando. Viana

(2007), ao abordar representações pictóricas na resolução de problemas de geometria, afirma que para resolver, muitas vezes os alunos fazem esboços, rabiscam, traçam figuras em perspectiva, utilizam-se de desenhos. Estes, mesmo sem levar à resposta correta do problema, comprovam como os alunos elaboram as imagens mentais, interpretam as informações e encaminham-se as estratégias de solução.

A representação pictórica está presente no cotidiano do aluno através dos meios de comunicação e informação, em suas diversas formas, na televisão, na mídia, na *internet* e no cinema. Tais representações devem ser aliadas ao processo de ensino facilitando o aprendizado. Viana (2007) afirma que “[...] embora os recursos tecnológicos possam fornecer imagens variadas e sofisticadas, os alunos precisam ter habilidade para interpretar representações, construir as suas próprias e desenvolver e comunicar suas ideias”.

Desta forma, o ensino e aprendizagem de Matemática através da representação pictórica devem ser métodos que auxiliem a construção do raciocínio lógico e dedutivo dos alunos, perante situações-problema seja qual for o conteúdo a ser trabalhado.

Dando continuidade à discussão em pauta, o próximo capítulo abordar-se-á as perspectivas, estudos e pesquisas acerca da representação pictórica, em âmbito nacional e internacional, visando um paralelo entre os pareceres de autores da área, em relação à sua utilização e aplicação, enquanto metodologia em práticas docentes de matemática.

4. REPRESENTAÇÃO PICTÓRICA: PERSPECTIVAS, ESTUDOS E PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.

No intuito de fazer um estudo aprofundado sobre o assunto em questão, este capítulo aborda diversos registros de autores que pesquisam o tema *a representação pictórica como elemento para a prática pedagógica em matemática*, em educação matemática. Também apresentará suporte teórico no campo das representações, não de forma a comparar teóricos, mas de apontar estudos científicos que narram sua utilização e aplicabilidade.

Em caráter internacional ou mesmo nacional, não se encontrou muitos registros no que diz respeito ao uso da representação pictórica aliada ao desenvolvimento da expressão e a comunicação no espaço escolar. Neste estudo, verificou-se que a maioria dos trabalhos versa sobre a representação, não se encontrando muitos trabalhos a respeito da representação pictórica, como já foi citado.

Mediante pesquisas, a Europa apresenta em maior escala alguns autores que fazem abordagens pertinentes ao tema, ressaltando-se João Pereira Ponte, Isabel Vélez e Marisa Quaresma que possuem o maior número de publicações europeias encontradas.

Em relação ao tema de pesquisa, as autoras brasileiras Medina, Liblik e Arsie (2001), em seu trabalho *A Expressão Gráfica na Educação* afirmam que especialistas em educação têm utilizado imagens não só como forma de comunicação, mas também como forma de expressão e, nesse sentido, a representação pictórica vem como eficiente forma de comunicação, que esta se faz presente no cotidiano do aluno, em suas diversas formas, principalmente na televisão, na mídia e no cinema.

Tais representações pictóricas devem ser aliadas ao processo de ensino facilitando o aprendizado, pois independentemente do conteúdo com o qual se trabalha, a imagem se mostra útil, pois oferece possibilidade de um modelo mental mais fiel à realidade. Esse *link* com a realidade permite a interação do conteúdo aprendido com o cotidiano vivenciado.

No século XVII, já se mostrava ao mundo as potencialidades da comunicação gráfica como uma eficiente forma de expressão, fato curioso tendo em vista as discussões existentes acerca do tema que em nossas pesquisas não foram muitas as encontradas.

Prontamente, Ponte e Vélez (2011), em seu trabalho *Representação em tarefas algébricas no 1º ciclo*, afirmam que tarefas com sequências pictóricas e numéricas bem como problemas de contagem de combinações estão entre as situações que podem contribuir para desenvolver esse tipo de pensamento. Os autores afirmam, também, que uma atenção especial

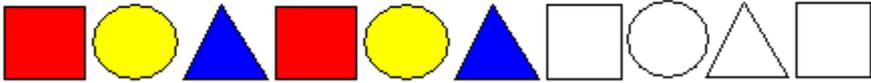
deve ser dada à maneira como os alunos lidam com as representações, sejam estas propostas numa devida atividade pelo professor ou mesmo com as que estes criam.

Segundo Goldin (2008), autor de referência internacional na esfera das representações, uma representação se caracteriza como uma configuração que representa algo, de alguma forma. Por exemplo, uma palavra pode representar um objeto, um numeral pode representar o número de elementos num conjunto, ou ainda a posição de um número numa reta numérica.

Ponte e Vélez (2010), no trabalho anterior intitulado *Representações em tarefas algébricas no 2º ano de escolaridade*, descrevem atividades realizadas com dois alunos de sete anos, do 2º ano do ensino fundamental, que tiveram, como tarefa, organizar três sequências pictóricas: a) uma sequência pictórica repetitiva; b) uma sequência pictórica crescente; e c) uma combinação de objetos. Os resultados deste trabalho mostraram que os alunos não só conseguiram compreender os aspectos fundamentais da representação, como também responder a partir destas, questões simples; mostraram, também, que os alunos conseguiram produzir sequências aditivas que lhes permitiram responder questões mais complexas. Como exemplo de sequência pictórica repetitiva, temos a Figura 1.

Figura 1 – Sequência com figuras geométricas

Tarefa1

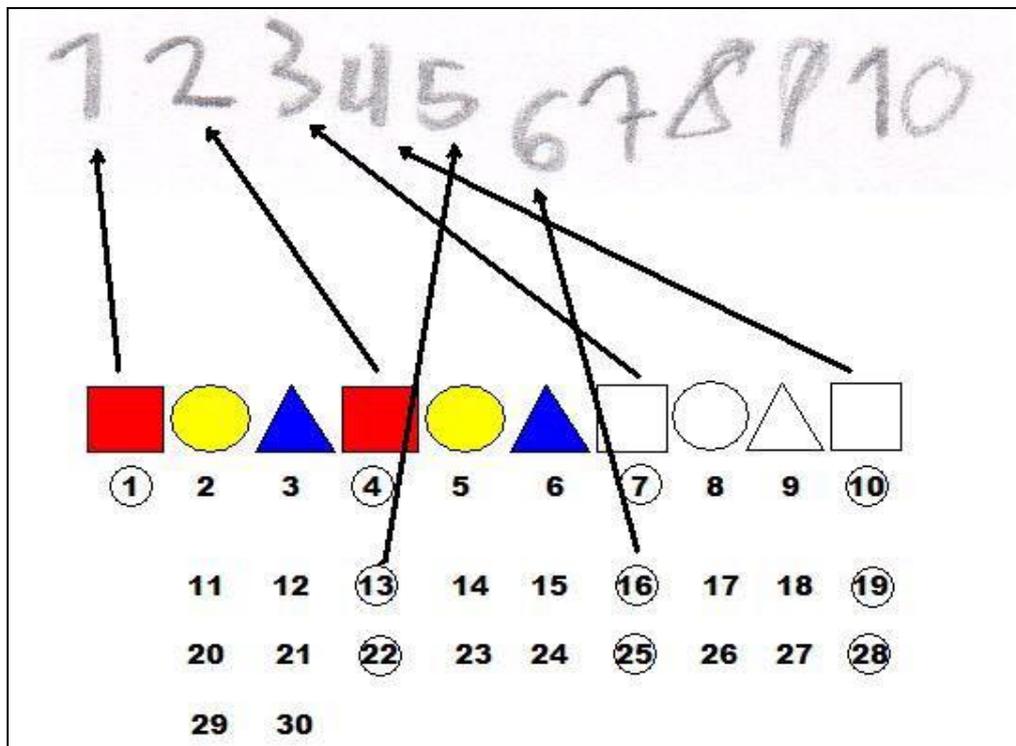


1- Descreva a sequência.
 2- Quantos elementos tem a sequência inicial?
 3- Complete a sequência.
 4- Como será o 20º elemento da sequência?
 5- Em trinta elementos, quantas vezes aparecerão o 1º/4º?
 6- Em 60 elementos, quantas vezes aparecem:
 6.1- O 2º/5º elemento?
 6.2- O 3º/6º elemento?

Fonte: PONTE; VELEZ, 2010 p. 6.

Em um dos problemas propostos por Ponte e Velez (2010) (ver FIG. 2), que abordava a combinação de objetos, um dos alunos utilizou uma combinação desconhecida por ele e errou a resposta.

Figura 2 – Resolução de um aluno sobre a tarefa 1



Fonte: PONTE; VELEZ, 2010 p. 10.

Através deste e de outros exemplos, os autores consideraram que o professor deve utilizar atividades que possibilitem o emprego da representação de combinação de objetos, por parte dos estudantes.

Em outro material, de origem europeia, intitulado *As Tarefas e a Comunicação numa Abordagem Exploratórias no Ensino dos Números Racionais*, dos autores Quaresma e Ponte (2012), da Universidade de Investigação do Instituto de Educação de Lisboa, há um relato de análise da prática letiva usada em aulas de cunho exploratório. Com o objetivo de levar os alunos a desenvolverem a compreensão de números racionais, sua ordenação, comparação e a resolução de problemas com racionais dando atenção especial à natureza das tarefas e da comunicação, os autores relatam que usaram uma metodologia qualitativa e interpretativa. Essa metodologia apresentou um formato de *design research* (Desenho investigativo) e todas as aulas foram gravadas para observação posterior do discurso utilizado, tendo por base tarefas diversificadas, bem como um discurso dialógico pontuando as questões de inquirição (conhecimento prévio).

Quaresma e Ponte (2012) reforçam que os números racionais apresentam acentuada dificuldade no entendimento e a problemática alarga na representação de frações. Entretanto,

este cenário de dificuldades constitui um terreno estimulante para o professor no estudo de suas práticas. Ainda, como citam os autores europeus Ponte e Véléz (2011), “[...] as representações matemáticas têm uma importância fundamental no raciocínio matemático, em particular no pensamento algébrico”.

Nesse pensamento, Ponte e Quaresma, relatam uma tarefa que utiliza a representação pictórica na compreensão de frações demonstrada na Figura 3.

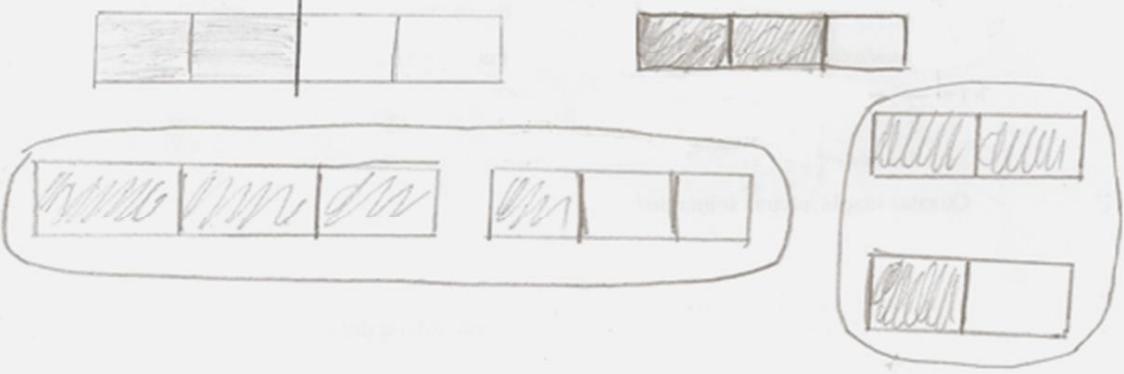
Figura 3- Uso da representação pictórica na compreensão de frações

Tarefa 3 – À descoberta da tira

A figura seguinte representa $\frac{3}{4}$ de uma tira de papel.



Representa agora, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{2}$ dessa tira.
Explica o teu raciocínio.



Fonte: PONTE; QUARESMA, 2012 p. 9.

Esta representação, segundo os autores, auxilia o entendimento pelo aluno de situações-problema que envolvam algoritmos e a visualização deste em suas variadas formas de representação.

De acordo com Bishop; Goffree (1986) e Janvier (1987) citado por Ponte e Véléz (2011), desde os anos 1980, as representações matemáticas vem merecendo uma crescente atenção por parte da investigação em Educação Matemática.

Medina, Liblik e Arsie (2001) e Romanatto (2011) relatam que desde a era pré-histórica os homens se norteavam e se comunicavam através do desenho, se valendo destes para suas contagens, suas medidas, seus intervalos de tempo, visto que, não conheciam os números. (Ver FIG. 4).

Figura 4 – Comunicação a partir de gravuras



Fonte: CARNEIRO, 2008 *apud* MEDINA, LIBLIK; ARSIE, 2001 p. 3.

Ainda podemos afirmar, através de reportagens e fotografias, que os indígenas brasileiros usavam de rabiscos e formas exóticas para se comunicarem e/ou adorarem seus deuses ou ainda se manifestarem em seus rituais. Mais precisamente, Lowenfeld, citado por Marques, aponta registros de que toda criança nos anos iniciais de suas vidas se comunicam através dos primeiros rabiscos e garatujas com significância de grande valia para seu mundo e seu entendimento (LOWENFELD 1964 *apud* MARQUES 2012).

Marques (2012) define as três fases do desenvolvimento gráfico da criança. A primeira, com início por volta dos dois anos de idade, Lowenfeld (1964) citado por Marques (2012) “atribui a designação de ‘estágio da garatuja’, sendo marcada por uma transição evolutiva ao longo de três sub-estádios – garatuja descontrolada, garatuja controlada e garatuja designada”. Marques reitera que:

Este período com uma duração expectável de aproximadamente dois anos, é marcada pela vontade de riscar de forma descontrolada e sem qualquer tipo de intenção, o riscar pelo riscar, até à procura de utilização de grafismos representativos de conceitos específicos, objetos e pessoas (MARQUES, 2012, p.29).

Em relação à segunda grande fase do desenvolvimento gráfico, a autora compreende um percurso de conquista progressiva do realismo figurativo. Marques (2012) descreve que “[...] nesta etapa podem ser enquadrados três estádios: o estágio pré-esquemático (dos quatro aos sete anos), o estágio esquemático (dos sete aos nove anos) e o estágio do início de realismo (dos nove aos onze anos)”. Lowenfeld citado por Marques prossegue:

...a criança realiza as suas primeiras experiências representativas, adquirindo progressivamente uma maior consciência do relacionamento das formas entre si, sozinhas ou em conjunto, ainda sem noção da profundidade ou da perspectiva, mas

que indiciam uma procura da aproximação da representação pictórica ao real (LOWENFELD, 1964 *apud* MARQUES, 2012, p. 29).

Analogamente, a terceira e última fase, Marques (2012) “[...] compreende a adolescência, desde o seu estágio inicial, aproximadamente a partir dos onze anos, passando pela crise identitária, até à adolescência plena”. Acerca do fato, Lowenfeld (1964) *apud* Marques (2012) retoma: “Neste período encontram-se compreendidos o estágio pseudo-realista (dos onze aos treze anos), o estágio da crise da adolescência (dos treze aos quinze anos) e a arte adolescente plena (dos quinze aos dezoito anos)”. Marques complementa:

A transição para o último estágio depende da forma como a fase da crise da adolescência é resolvida, e, da vontade que cada indivíduo revela para superar e melhorar as suas representações de forma consciente, bem como da procura identitária através da expressão visual plástica/artística (MARQUES, 2012, p. 29).

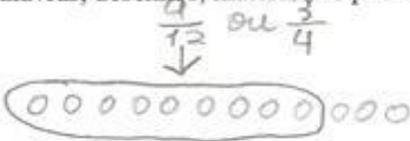
Embora muitos educadores acreditem no reforço mental que a imagem proporciona ao entendimento cognitivo do aluno, e que esta forma de comunicação é uma forma válida e herdada do próprio comportamento humano, estes não tem embasamento teórico que afirme tais crenças. Analisando os resultados da sua própria investigação, Stylianou (2010) citado por Ponte e Vélez (2012) conclui que, apesar de utilizarem vários tipos de representações no seu ensino, os professores não o fazem conscientemente e com uma intenção definida. A autora indica, igualmente, que, na sua grande maioria, os professores definem representações como sendo “diferentes formas de ilustrar um determinado conceito”.

As definições que os professores apresentam centram-se nas representações como produto (desenhos, tabelas, diagramas) e não tanto como processo (isto é, o processo de representar objetos e ideias matemáticas). Além disso, tendem a encarar as representações dos alunos como modelos visuais informais de reduzido valor e não como representações verdadeiramente matemáticas.

Tendo em vista os estudos recentes, uma imagem, seja ela qual for, relacionada a uma situação imposta ao aluno, pode contribuir para que este construa entendimento sólido, sobre a situação a partir dos registros gráficos. Em relação ao fato, observe a Figura 5, de Quaresma e Ponte (2012).

Figura 5- Atividade envolvendo representação

Questão 2
 O amigo do Carlos tinha 12 tampinhas e deu 9 ao Carlos. Que fração das suas 12 tampinhas deu ao Carlos?
 Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos, material, esquemas ou cálculos.



R: Deu $\frac{9}{12}$ ou $\frac{3}{4}$ das suas tampinhas ao Carlos.

Fonte: PONTE; QUARESMA, 2012 p. 9.

Os autores abarcaram oportunidades de se comunicar matematicamente em várias instâncias conhecidas pelos discentes, fato responsável pela consolidação do conhecimento construído pelo aluno e mediado pelo professor. Percebe-se, ainda, que as informações ilustradas traduzem situações matemáticas de difícil compreensão para o aluno, oportunizando que este construa um raciocínio mental, mais claro e concreto.

Duval (2003) destaca a importância e a necessidade de um ensino pautado nos registros de representação semiótica para a aprendizagem em matemática. Segundo ele, as representações compartilham linguagens entre o pensamento cognitivo e o indivíduo, permitindo que a representação semiótica aborde o funcionamento cognitivo através dos registros. O autor ainda defende a multifuncionalidade dos registros de representação semiótica, considerando suas variadas formas de comunicação simbólicas, escritas, geométricas, entre outros. Isso, porque um trabalho pedagógico realizado a partir destes registros, pode contribuir para um funcionamento cognitivo do aluno, uma vez que o objetivo do ensino é a aquisição e construção do conhecimento (DUVAL, 2003).

Notam-se nas vivências cotidianas de salas de aulas, nos mais diferentes níveis de aprendizagens, as grandes dificuldades que os alunos vêm mostrando ao longo da construção de seu aprendizado matemático. Demo (2000) citado por Mendes (2009) reflete que “[...] o aluno não leva para a vida o que decora, mas o que cria por si mesmo”. Em situações simples, estes não tem conseguido enxergar, sendo uma situação de seu convívio como uma situação prática e corriqueira. Por outro lado, uma vez que o discente, ao ter seu raciocínio

direcionado, intermediado pelo professor através da representação pictórica, demonstra mais clareza no entendimento dos fatos, conseguindo resolver as situações-problema.

Duval (2004) defende ainda que “[...] não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer à noção de representação (...), pois não há conhecimento que um sujeito possa mobilizar sem uma atividade de representação”. Analogamente, Goldin (2008) apresenta os construtos, desenvolvimento de estruturas e sistemas de representação como sendo de acentuada relevância para a aprendizagem matemática.

As dificuldades na aprendizagem matemática sistêmica não é assunto da atualidade. Observa-se na grande maioria dos fracassos escolares, certa fobia pela disciplina, adquirida, muitas vezes, pela não compreensão das informações apresentadas fora do contexto social do educando ou mesmo sem uma modelagem que a faz tão difícil de ser entendida. É fato que muitas pessoas que dominam os cálculos mentais e as operações necessárias para as situações do dia a dia, sem nunca ter passado por nenhuma escola, trazem consigo um meio de tornar seu raciocínio lógico e aceitável, mesmo que só ele entenda, sempre consegue alcançar seu objetivo sem perdas ou danos a outrem. Compreende-se ainda que, mesmo sem consciência do que faz, estas pessoas acabam por criar uma representação na qual, simbolicamente, tornam sua matemática mais suave e fácil (GOLDIN, 2008).

Se por um lado existem tantas dificuldades em aprender matemática, por outro, o conhecimento da matemática vivenciada pelo aluno, contextualizada em conteúdos curriculares, torna mais acessível a aquisição destes saberes. Segundo Garcia e Miskulin:

Uma imagem que pode ser utilizada para ensinar conceitos matemáticos abstratos ajuda a esclarecer e simplificar a aprendizagem de conceitos geométricos. A visualização é de fundamental importância na construção e exploração dos conceitos matemáticos (GARCIA; MISKULIN, 2006, p. 1).

Muitos são os desafios em ensinar matemática de forma clara e objetiva para uma geração globalizada, que se comunica por gestos e ícones, abreviadores de falas e entendimentos, já que de forma sistêmica, o mero repasse de fórmulas prontas e acabadas já não gera mais significativos interesses e nem aprendizado. Pouco se tem conseguido alcançar com as práticas tradicionais que não dialogam com o aluno. É fato que este, por si só, já é capaz de construir seus próprios saberes de forma lúdica e agradável, tornando-se, não só alfabetizado, mas letrado. Assim, Cox (1999) citado por Viana (2007) estudou as representações usadas na solução de problemas, encontrando que os sujeitos diferiam na maneira de externalizar seu raciocínio. Para essa etapa, Ponte e Quaresma (2011) apresentam uma tarefa realizada em seus estudos, conforme demonstra a Figura 6.

Figura 6 – Externalização do raciocínio

15. Se a figura seguinte representar 80% da colecção de berlindes do Luís, desenha ao lado a colecção completa dos berlindes do Luís .

Fonte: PONTE; QUARESMA, 2011 p. 13.

Neste processo, o discente externalizou seu raciocínio de maneira a demonstrar seu conhecimento adquirido e representou registros cognitivos de seu raciocínio, como defendido por Cox (1999) citado por Viana (2007).

Embora os recursos tecnológicos possam fornecer imagens variadas e sofisticadas, o estudante precisa ter habilidade para interpretar tais representações, construir as suas próprias, desenvolver e comunicar suas ideias. Por isso, se faz necessária uma mudança a respeito de como o educador tem agido diante de seu aluno quando este é submetido às representações das operações matemáticas e suas resoluções. Cabendo a este “abrir um leque”, dando oportunidade ao aluno de criar estratégias próprias de resolução ou ainda de mediar essa construção a partir do que possa ser de entendimento para ele, e por que não os recursos gráficos, em abundância na mídia e no dia a dia desse aluno. De acordo com o fato, Freire avalia que:

[...] é fundamental que, na prática da formação docente, o aprendiz de educador assuma que o indispensável pensar certo não é presente dos deuses nem se acham nos guias de professores que iluminados intelectuais escrevem desde o centro do poder, mas, pelo contrário, o pensar certo que supera o ingênuo tem que ser produzido pelo próprio aprendiz em comunhão com o professor formador (FREIRE, 1996, p. 38).

Sabendo-se que os jogos, as imagens e a contextualização dos conteúdos auxiliam na construção da aprendizagem matemática, se faz necessário o uso consciente dessas ferramentas em sala de aula desde os anos iniciais. Assim, será permitido à criança construir o alicerce de seus saberes matemáticos de forma segura e agradável, para que a cada etapa, ela relacione os saberes e tenha autonomia nessa edificação de conhecimentos, indissociáveis na vida escolar.

Como já citado em capítulos anteriores, as experiências acadêmicas do grupo de pesquisa, em estágios de regências ou em atividades do PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência), só fazem confirmar que o aluno, de forma geral, seja ele de qual nível for, apresenta muita dificuldade em interpretar as questões matemáticas, mesmo as mais simples. Um exemplo claro disso são as questões que envolvem a geometria, que tem as imagens como imprescindíveis para o entendimento desse ramo da matemática.

A visualização torna-se uma forma mais efetiva para uma melhor compreensão da matemática, apesar da língua verbal e escrita ser a mais utilizada em sala de aula. Conforme Fischbein citado por Garcia e Miskulin:

A visualização como observação das formas geométricas, constitui-se em espaço que exige a descrição e a comparação das formas, resgatando as suas semelhanças e diferenças possibilitando, dessa forma, a construção da imagem mental, o que permitirá ao aluno pensar no objeto geométrico, na sua ausência, distinguindo as suas características conceituais e figurais (FISCHBEIN, 1993 *apud* GARCIA; MISKULIN, 2006, p. 1).

Com os avanços da psicologia cognitiva, Sternberg (2000) e Viana (2007) apontam teorias que ajudam a compreender como as pessoas pensam, representam o conhecimento, formam imagens e solucionam problemas. As representações mentais são as maneiras pelas quais o indivíduo torna presente no pensamento alguns aspectos do meio ambiente, sejam externos ou pertencentes ao seu próprio mundo imaginário. Este processo torna significativa a aprendizagem, dificultando o esquecimento do que se viu diferente do ensino tradicional que passa algo pronto e sem sentido para o aluno. Desta forma, Viana descreve que:

Para resolver certas questões de geometria, muitas vezes os alunos fazem esboços, rabiscam, traçam figuras em perspectiva, enfim, utilizam-se de desenhos que, para este trabalho, serão chamados de representações pictóricas externas. Estas, mesmo sem levar à resposta correta do problema, demonstram como os alunos elaboram as imagens mentais que servem de apoio à interpretação das informações e encaminhamento das estratégias de solução (VIANA, 2007, p. 1).

De acordo com Cox (1999) citado por Viana (2007), “[...] pode-se afirmar que representações externas são instrumentos de ajuda úteis para o raciocínio, pois podem representar a informação do problema e também facilitar a mudança de estratégias de solução”. A visualização é de fundamental importância na construção e exploração dos conceitos matemáticos. Talvez o motivo de tanta dificuldade na aquisição da aprendizagem matemática seja justamente a forma como as abordagens desta chegam aos estudantes.

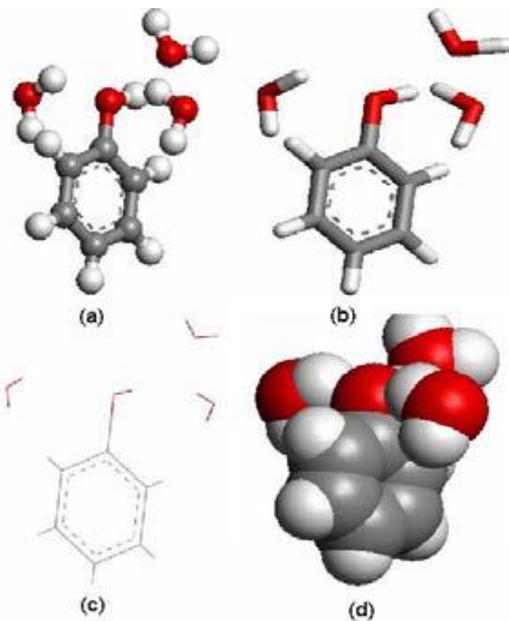
O professor, diante de tantas questões que dificultam o seu trabalho, ainda carrega consigo, arraigado em sua prática pedagógica, o dever do cumprimento da grade curricular, dizendo não ter tempo para as discussões diagnósticas acerca do assunto em pauta. Assim, perde muitas vezes a oportunidade de ilustrar e de buscar através do próprio aluno, a construção significativa daquele saber. Além do mais, o sistema educacional, muitas vezes não oferece oportunidade de construção de um saber independente do educando.

Muito se tem ouvido falar em mudanças de práticas pedagógicas, voltada para um aluno ativo e participativo do seu próprio saber. Desta construção independente, o tema de pesquisa vem mostrando muitas possibilidades em trabalhar os conhecimentos matemáticos a partir do visual, do gráfico, onde o aluno ganha entendimento das questões matemáticas com segurança.

Portanto, as representações pictóricas podem fazer a diferença no que tange ao entendimento de situações-problema teoricamente apresentadas aos mesmos. E o mais interessante é que essa representação pode partir do próprio educando que deve apenas ser motivado pelo professor, na retirada das informações e na transformação destas, em figuras ilustrativas. O professor, ao fazer esta colocação, permitirá que o educando crie o hábito de, ao se deparar com qualquer situação escrita, transformar em ícones tudo que foi lido para, assim, ser compreendido. Acerca do fato, Santos e Greca dizem que:

Para superar essas dificuldades, pesquisadores e educadores têm sugerido uma variedade de abordagens instrucionais. As estratégias propostas incluem o uso de modelos físicos (Huddle, White & Rogers, 2000); desenhos estáticos (*static drawings*) (Sanger, 2000); e animações (dinâmicas e tridimensionais) criadas por ferramentas tecnológicas para ajudar os estudantes a aprender a utilizar representações microscópicas e simbólicas na descrição e explicação de processos químicos (Barnea & Dori, 2000) (SANTO; GRECA, 2005, p. 2).

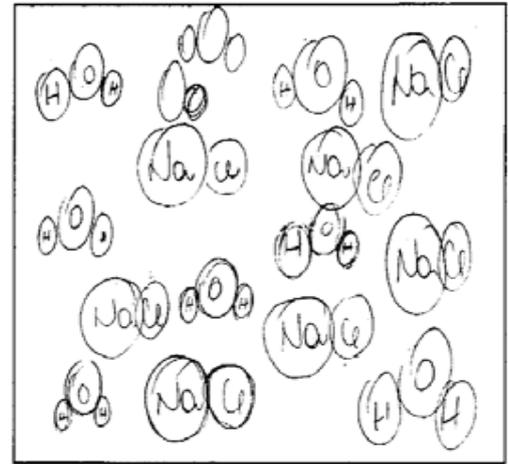
De uma maneira geral, os autores supracitados, em um de seus estudos, relatam que “o uso de simulações computacionais ou manuais gráficos, produzem uma significativa aprendizagem conceitual e uma apropriação representacional (simbólica) por parte do estudante” (SANTOS; GRECA, 2005). A representação de vários aspectos das atividades de cálculos mentais, ou não, é bastante dispersa no currículo escolar. Além do problema previamente indicado, a utilização de uma única representação pictórica, preferencialmente por parte dos professores, oportuniza tal procedimento (Ver FIG. 7 e 8).

Figura 7- Representações tradicionais

Fonte: SANTOS; GRECA, 2005 p. 4.

Figura 8 - Representações dos estudantes

3ª situação: Um cristal de sal (NaCl) é dissolvido em água.



Fonte: SANTOS; GRECA, 2005 p. 4.

Os estudantes precisam de mais experiências, com os moldes de visualização, como ferramentas que permitem contrastes de abordagens conceituais do fenômeno e discussão do papel dos modelos na investigação científica, como apresentado por Santos e Greca (2005).

Os processos cognitivos específicos de modelação matemática e as relações entre aprendizagem conceitual e representações pictóricas têm sido pouco estudados. Em geral, os trabalhos focam sobre um ou outro aspecto, sendo abordados independentemente um do outro, como se aprender a “fazer, fazendo” pudesse acontecer separando-se a teoria da prática.

Como se pode notar, a representação pictórica pode auxiliar não só na compreensão de uma situação-problema como também desenvolver no aluno a habilidade de, antes de qualquer coisa, ao ler um problema, retirar deste, informações de suma importância para o passo a passo da sua resolução.

Portanto, de posse destas informações, os estudos apontam a praticidade de se trabalhar com a imagem como instrumento de ensino em matemática. Entretanto, não se encontrou muitos estudos brasileiros na área, fator intrigante ao se considerar sua repercussão nos estudos analisados, principalmente nos europeus e sua facilitação no processo de ensino.

Posteriormente, abranger-se-á estudos sintetizados e organizados em tópicos, respaldados nos Parâmetros Curriculares Nacionais, que descreverão a categorização dos trabalhos científicos referentes ao uso das representações e representações pictóricas no ensino de conceitos matemáticos.

5. CATEGORIZAÇÃO DOS ESTUDOS EM REPRESENTAÇÕES

Com o objetivo de compreender o universo das pesquisas que utilizam os conceitos da representação em matemática, valeu-se da categorização, pois houve a necessidade de agrupar tais estudos em eixos temáticos. Buscou-se em Fiorentini e Lorenzato (2006) o conceito de categorização e percebeu-se que, para tais autores, esta consiste no processo pelo qual se organiza e/ou seleciona informações, classificando-as em categorias, por sua vez, que possuam elementos comuns. Sendo assim, para a elaboração desta seção, categorizou-se as produções científicas em eixos temáticos propostos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) de Matemática. Escolheram-se os PCN's (BRASIL, 1997) pelo fato de ser este, o documento oficial para o ensino no Brasil e, também, porque o mesmo rege as diretrizes curriculares.

Desta forma, categorizou-se a literatura encontrada sobre o tema de pesquisa, de acordo com os quatro eixos temáticos educacionais: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação.

As etapas concernentes a esta seção seguem esquematizados no Quadro 1:

Quadro 1: Categorização de publicações encontradas acerca das representações.

| EIXOS | Publicações | Autores |
|---------------------|---|---|
| Números e Operações | Representações no ensino-aprendizagem da Álgebra | João Pedro da Ponte e Maria Helena Martinho |
| | Representações em tarefas algébricas no 1º ciclo | João Pedro da Ponte e Isabel Velez |
| | Representações em tarefas algébricas no 2º ano de escolaridade | João Pedro da Ponte e Isabel Velez |
| | Os registros de representações semióticas e a modelagem matemática: a realização de conversões em uma atividade no ensino médio | Cláudia Carreira da Rosa |
| | Investigação sobre o ensino da Álgebra: uma reflexão sobre estudos realizados na universidade de Lisboa | João Pedro da Ponte e Hélia Oliveira |
| | Raciocínio matemático em contexto | Joana Mata Pereira e João |

| | | |
|----------------|--|--|
| | algébrico: uma análise com alunos de 9º ano | Pedro da Ponte |
| | As tarefas e a comunicação numa abordagem exploratória no ensino dos números racionais | Marisa Quaresma e João Pedro Ponte |
| | A compreensão dos números racionais, comparação e ordenação: o caso de Leonor | Marisa Quaresma e João Pedro Ponte |
| | A construção das partes e a reconstrução da unidade na compreensão dos números racionais | João Pedro da Ponte e Marisa Quaresma |
| | Registos de Representação e o número racional: uma abordagem nos livros didáticos | Glória Garrido Catto |
| | Representações na aprendizagem de sistemas de equações | Sandra Nobre, Nélia Amado e João Pedro da Ponte |
| | Registos de representação semiótica na compreensão de função do 1º grau por alunos da 1ª série do ensino médio | Dejahyr Junior Lopes e José Luiz Magalhães de Freitas |
| | Representação e visualização no estudo de funções | Lais Couy e Maria Clara Rezende Frota |
| Espaço e Forma | As representações pictóricas de alunos do ensino médio na resolução de problemas de geometria: uma análise qualitativa | Odaléia Aparecida Viana |
| | A visualização e a representação geométrica de conceitos matemáticos e suas influências na constituição do conceito matemático | Luciane Maia Insuela Garcia e Rosana Giaretta Sguerra Miskulin |
| | O papel das representações semióticas no ensino de matemática | Rafael Silva Patrício e Maysa da Silva Leite Almeida |
| | Relação entre representações gráficas e escolarização | Andréa Patrocínio |

| | | |
|--------------------------|---|---|
| | O ensino da geometria e os registros de representação sob um enfoque epistemológico | Franciele Catelan Cardoso |
| Grandezas e Medidas | Não se encontrou publicações científicas engajadas nesse eixo temático. | |
| Tratamento da Informação | A expressão gráfica na educação | Simone da Silva Soria Medina, Ana Maria Petritis Liblik e Keilla Cristina Arsie |
| | Representação semiótica no plano cartesiano: estudo do trânsito entre registros de representações matemáticas | Afrânio Austregésilo Thiel |

Fonte: Elaborado pelas autoras.

5.1 Números e Operações

De acordo com os PCN's (BRASIL, 1997), o conhecimento numérico se apresenta como ferramenta de solução de problemas cotidianos a partir de estudos de suas propriedades e sua constituição histórica. Segundo Colombo e Moretti (2007), o discente ao entender a presença diversificada dos conjuntos numéricos e a essencialidade das operações numéricas no dia a dia da humanidade, ampliará suas concepções matemáticas e de convivência social.

Desta forma, Rosa discute que:

A aprendizagem é um processo que depende de muitos fatores, dentre os quais, a relação interacionista entre estudantes, estudante e professor, estudante e o meio e entre estudantes e as ferramentas às quais os mesmos têm acesso. Entre essas ferramentas podemos tomar como exemplo os sistemas de representação externa, a escrita em língua natural, a escrita dos números e as representações gráficas (ROSA, 2009, p. 112).

O fato supracitado reafirma a importância da comunicação dialógica nas aulas de matemática, visto que essa comunicação será permitida ao estudante por diferentes linguagens. Os tipos de comunicação em aulas investigativas de matemática podem ocorrer através da fala, escrita ou representações. Assim, Duval (2003) discorre que “toda comunicação em Matemática se estabelece com base em representações”. Em seu estudo *Os registros de representação semiótica e a modelagem matemática: a realização de conversões em uma atividade no ensino médio*, Rosa (2009), na tentativa de proporcionar aos discentes situações-problemas cotidianas, para sua solução através de registros e apesar da dificuldade

encontrada pelos alunos nas soluções e conversões, observou a particularização dos problemas pelos discentes. Os alunos, ao se identificarem com os problemas, se sentiam responsáveis pela resolução. Mesmo sendo “Função” o conteúdo matemático abordado no estudo, a autora relatou variedades de registros dos alunos.

No conteúdo de Função aliado ao tema da pesquisa *Representação e visualização no estudo de funções*, Couy e Frota (2007) investigam as concepções, representações e visualizações de professores e alunos de um curso de especialização em Educação Matemática sobre transformação de funções de uma variável real. Para tal, as autoras propuseram uma sequencia didática que ressaltava as representações para a solução de funções, no intuito de abordar a interpretação simbólica e textual que o aluno atribui a funções a partir da representação gráfica das mesmas; a representação gráfica construída pelo aluno, a partir da apresentação de funções usando a linguagem textual e simbólica. As autoras balizaram discussões teóricas a respeito do papel da representação e visualização na aprendizagem de matemática, seguida do desenvolvimento do trabalho e resultados. Foram apontados, durante a pesquisa, as dificuldades apresentadas pelos alunos em representar graficamente e a importância de se enfatizar as representações de uma função nas aulas de Cálculo dos cursos de Licenciatura.

Ainda inerente à Função, Lopes e Freitas (2009), em *Registros de representação semiótica na compreensão de função do 1º grau por alunos da 1ª série do ensino médio*, deram preferência às linguagens e códigos interligados à Função do 1º grau (linguagem algébrica, linguagem natural, tabelas e gráficos). O cerne da questão baseou-se na representação semiótica enquanto elemento de articulação para o entendimento de função. Nesse sentido, os pesquisadores elaboraram uma sequencia didática que promovesse acentuada participação dos alunos através de atividades orientadas. As atividades propostas priorizaram a generalização, diversidade de representações e registros. Lopes e Freitas (2009) salientaram que “A partir da distinção dos grupos pudemos observar que as transformações, por tratamento e conversão, são frequentes e estão relacionadas ao tipo de registro e ao nível de conhecimento que os alunos possuem sobre o objeto representado”. Os autores relatam, também, o interesse em analisar dificuldades em Função do 1º grau e suas representações.

Nobre, Amado e Ponte (2011), em estudos a respeito de *Representações na aprendizagem de sistemas de equações*, investigam as representações usadas por discentes do 9º ano, na solução de atividades matemáticas de sistemas de duas equações do 1º grau e duas incógnitas. O estudo procurou entender as formas de emprego dessas atividades de maneira a contribuir no processo de aprendizagem de métodos algébricos e ainda procurou observar o

enfoque algébrico dessas atividades pelos estudantes em questão. Perceberam, a partir deste, que os alunos majoritariamente procuram representações aritméticas na resolução de problemas, sendo que esta representação auxilia na aprendizagem formal dos sistemas de equação do 1º grau.

Em relação aos conteúdos de Álgebra, Ponte e Martinho (2011) tecem discussões em um resumo temático de comunicações orais, acerca das *Representações no ensino-aprendizagem da Álgebra*. Os autores afirmam que “A utilização de diferentes representações, desde as mais informais às mais formais, comporta um forte potencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico” (PONTE; MARTINHO 2011, p. 1). Nessa linha de pensamento, os mesmos debatem a utilização das diversas representações na aprendizagem algébrica em vários anos da educação básica.

Em estudos sobre a Álgebra, Ponte e Oliveira (2011) em “*Investigação sobre o ensino da álgebra: uma reflexão sobre estudos realizados na universidade de Lisboa (2006-11)*”, discorrem acerca das investigações algébricas nas aulas de matemáticas, apontadas em estudos da universidade de Lisboa entre 2006 e 2011. Ancoraram a pesquisa de representações em autores como Duval (2006), Goldin (2008) e Damásio (1995) citados por Ponte e Oliveira (2011). Os autores apontam as mudanças curriculares de matemática e afirmam que “os alunos aprendem a partir de sua experiência matemática e da reflexão sobre sua experiência” (PONTE; OLIVEIRA, 2011). Desta forma, a delimitação de atividades que estimulem o raciocínio e a investigação se apresenta como grande aliada no ensino de matemática.

Pereira e Ponte (2011), a respeito do trabalho *Raciocínio matemático em contexto algébrico: uma análise com alunos de 9º ano*, analisam qualitativa e interpretativamente o raciocínio dos alunos na resolução de problemas algébricos. Para a pesquisa foram entrevistados dois alunos do 9º ano e observadas as estratégias de solução utilizadas por eles. Os resultados comprovaram que os alunos, mesmo possuindo facilidade de formular conjecturas, acreditam não ser necessário utilizar desta ferramenta para testar e/ou justificar, além de dificuldades em transformar linguagem natural em algébrica, usufruindo esporadicamente de meios algébricos para solução de problemas.

Ponte e Velez (2010) articulam, em seu trabalho *Representações em tarefas algébricas no 2º ano de escolaridade*, através de estudo exploratório, representações agregadas na solução de problemas algébricos no 2º ano. Primando a observação das representações utilizadas por alunos de 7 anos na resolução de problemas algébricos, a pesquisa propõe três atividades. As atividades abrangiam sequência pictórica repetitiva, sequência pictórica

crescente e combinação de objetos. Os estudos apontaram aprendizagem significativa pelos alunos de conceitos fundamentais e habilidade de representar e solucionar alguns problemas complexos.

Ponte e Velez (2011) ainda proferem acerca das *Representações em tarefas algébricas no 1º ciclo*. As atividades aplicadas objetivaram o incentivo ao pensamento algébrico no 1º ciclo do ensino básico através de sequências pictóricas e numéricas e problemas de contagem de combinações. O artigo ilustra atividades que estimulam a interpretação por representação, além de utilizar das representações em enunciados. O estudo abarca as maneiras em que os alunos conduzem as suas soluções e quais ferramentas empregam. Os autores apontam o fato de os estudantes sentirem-se motivados em tarefas de seu próprio interesse e utilizarem várias estratégias de resolução para estes problemas, bem como, relatam a importância das representações no ensino de matemática.

No que diz respeito a números racionais, Quaresma e Ponte (2010), em *A compreensão dos números racionais, comparação e ordenação: o caso de Leonor*, realizam um estudo de caso que primou compreender a forma com que as representações do número racional corroboram na compreensão de números racionais. De cunho exploratório, a pesquisa ocorreu em uma unidade de ensino, com uma aluna do 5º ano como objeto de estudo. O levantamento de dados baseou-se em registros audiovisuais, entrevistas, produções escritas e diário de bordo. Segundo os autores “[...] o estudo sugere, por isso, a necessidade de trabalhar de forma integrada, das várias representações de número racional nos diferentes significados” (QUARESMA; PONTE, 2010). Os resultados demonstraram melhoria na compreensão e representações de número racional por parte da aluna e avanço na determinação de estratégias e conjecturas.

Os mesmos autores, Ponte e Quaresma (2011), em outro trabalho *A construção das partes e a reconstrução da unidade na compreensão dos números racionais*, apontam que “a construção das partes e a reconstrução da unidade são aspectos fundamentais da aprendizagem dos números racionais” (PONTE; QUARESMA, 2011). Desta forma, o trabalho avalia a compreensão de alunos do 5º ano a partir das representações: pictórica e de fração, em unidades exploratórias. O levantamento de dados foi feito a partir de entrevistas, observações e registros, estando interrelacionado ao caso de Leonor. As atividades apontaram gradativo desenvolvimento por parte dos alunos acerca dos números racionais.

Ainda, Quaresma e Ponte (2012), no estudo intitulado: *As tarefas e a comunicação numa abordagem exploratória no ensino dos números racionais*, analisam as práticas docentes em uma instituição de ensino, delineadas para o desenvolvimento acerca da

compreensão, noção, comparação e ordenação dos números racionais e para a sua capacidade de resolução de problemas com racionais através de tarefas. Para tal, utilizaram a metodologia qualitativa e interpretativa, ou seja, coletaram dados através de vídeo e áudio, recolheram trabalhos dos discentes envolvidos e analisaram o material. Os resultados apontaram possibilidades de práticas exploratórias, em aulas de matemática, a partir de tarefas de natureza diversificadas e discurso dialógico, pontuado por questões de inquirição.

Catto (2000), em *As tarefas e a comunicação numa abordagem exploratória no ensino dos números racionais*, analisa livros didáticos a partir da teoria de Raymond Duval acerca das representações e registros no processo de ensino dos números racionais. A autora procurou observar a ocorrência e a forma de ocorrência dos registros e conversões nos livros em questão. Verificou-se que um dos livros retrata o registro numérico e conversões de registros figural e simbólico, enquanto o segundo apresenta o registro figural e não prioriza conversões.

De acordo com os estudos supracitados, o conhecimento numérico, alinhavado às representações, concebe acentuada relevância de apropriação do conhecimento construído no processo de ensino e aprendizagem de matemática e suas aplicações cotidianas. O estudante, ao dominar esse conteúdo, poderá participar de relações matemáticas de sua vivência social e assim será integrado à comunidade.

5.2 Espaço e Forma

Este eixo engloba os conceitos geométricos necessários para o desenvolvimento matemático dos alunos. Segundo os PCN's (BRASIL, 1997), a Geometria é um conteúdo matemático primordial para o desenvolvimento espacial, representativo, organizacional e de compreensão da sociedade. E ainda indica o trabalho conjunto da Geometria e Resolução de Problemas para estimular interesse dos alunos. A assimilação efetiva de conceitos geométricos promove habilidades de observação, percepção, comparação, entre outros nos estudantes, além de ser permitido o trabalho articulado com a arte, pintura, desenhos, esculturas e artesanato.

Cardoso (2012), em *O ensino da geometria e os registros de representação sob um enfoque epistemológico*, aponta como competências geométricas necessárias nas vivências habituais das pessoas, as disposições, ocupações e localizações espaciais. A autora afirma que “Os saberes relacionados à geometria desenvolvem competências que facilitam a convivência dos sujeitos no espaço, bem como, a sua interpretação” (CARDOSO, 2012). Todavia, a autora

aponta em seus estudos, os obstáculos dos estudantes na aprendizagem deste conteúdo matemático. Na tentativa de compreender essas dificuldades, ela pontuou fatores que interferem negativamente na aprendizagem de Geometria, utilizando a teoria de Raymond Duval acerca dos registros e representações como base para suas discussões. O primeiro dos fatores é “a compreensão por parte do professor de que o conhecimento matemático, até sua chegada na sala de aula, sofreu diversas transformações e rupturas ao longo dos tempos” (CARDOSO, 2012). O professor preso ao ensino tradicional ou da forma pela qual viveu o processo ensino-aprendizagem ignora especificidades importantes para o ensino de Geometria. A autora também pontua que no processo de aprendizagem geométrica, inclusive a partir da resolução de problemas, as várias formas de representações apresentam-se de suma importância.

Ainda em Geometria, Garcia e Miskulin (2006), no trabalho *A visualização e a representação geométrica de conceitos matemáticos e suas influências na constituição do conceito matemático*, defendem a visualização e representação para o entendimento de conceitos geométricos em contrapartida ao ensino memorístico, expositivo e baseado em fórmulas. Ao visualizar, o estudante percebe as formas, conceitos e o espaço envolvido na Geometria, principalmente com a utilização da tecnologia em aulas de matemática. As autoras organizaram o trabalho com uma introdução que abarca a temática de pesquisa, um breve histórico do processo de ensino-aprendizagem geométrico, abordagem teórica sobre visualização geométrica, algumas representações, estudos das representações de conhecimentos matemáticos, utilização de tecnologia da informação e comunicação, investigações matemáticas, objetivos e problemas de pesquisa, metodologia utilizada, análise de dados e considerações finais. Para a aplicação da pesquisa, desenvolveram atividades exploratório-investigativas com cinco alunos de 2º ano do ensino médio. Foram muitas as dificuldades encontradas pelos alunos nas atividades e, a partir disso, as autoras pontuaram a essencialidade de uma prática pedagógica eficaz para a aprendizagem significativa dos estudantes.

Viana (2007) também versa sobre *As representações pictóricas de alunos do ensino médio na resolução de problemas de geometria: uma análise qualitativa*. Nesta obra, a autora analisa a utilização das representações pictóricas externas na solução de problemas geométricos. Para tal, aplicou questões de vestibular selecionadas para onze alunos do ensino médio de uma instituição particular. A autora discorre que as representações pictóricas externas auxiliaram na solução de problemas geométricos, visto que “os riscos auxiliares feitos no desenho mostram que os alunos utilizaram a figura para organizar as informações

especialmente, refinar e tornar imagens mentais não ambíguas, além de mantê-las na memória” (VIANA, 2007). Desta forma, o estudo mostra que na solução de problemas geométricos podem-se analisar evidências de processos visuais mentais em todas as suas fases.

Acerca do ensino de vetores no ensino médio, Patrício e Almeida (2011), em *O papel das representações semióticas no ensino de matemática*, abordam teorias de Raymond Duval (2003 2004 2006) e Charles Peirce (2000) a respeito dos registros de representações e semiótica. Os autores procuraram discutir a importância das representações no ensino de matemática e as contribuições das linguagens de comunicação para a compreensão de conceitos relacionados. Patrício e Almeida (2011) apontam que a pesquisa desencadeou um processo de elaboração de ações para diminuir obstáculos na aprendizagem em aulas de matemática, atendo-se às representações como elemento para a prática docente.

Patrocínio (2007), em *Relação entre representações gráficas e escolarização*, primou a observação da bagagem matemática de alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA), no que diz respeito à construção de gráfico de barras. A autora pesquisou alunos de duas turmas de EJA nível III, através de atividades que versaram sobre leitura, construção e interpretação de gráficos de barras a partir de dados fornecidos. Os resultados apontam que os estudantes de EJA não necessitam de acentuado aprofundamento teórico para a solução de problemas, visto que apresentam compreensões gráficas satisfatórias apenas pela discussão do conteúdo.

Em suma, mediante o exposto, as representações facilitam a visualização no processo de ensino de Geometria e auxiliam os discentes na determinação e avanço de suas concepções representativas, espaciais e dimensionais. Além disso, o domínio desses conceitos desenvolve aptidões inerentes às aprendizagens matemáticas e determinação social (BRASIL, 1997).

5.3 Grandezas e Medidas

Abarcando os conhecimentos matemáticos interligados às grandezas e, também, às medidas, a aprendizagem deste eixo se faz indispensável nas relações matemáticas cotidianas. Para os PCN's (BRASIL, 1997), este eixo possui acentuada relevância social por estar presente em inúmeras situações cotidianas e atividades realizadas. Desta forma, o ensino efetivo e a aprendizagem significativa desses conceitos devem ser fatores primordiais dentro da matemática. Todavia não se encontrou estudos que tecem redes entre as representações e as grandezas e medidas, fato intrigante tendo em vista sua importância apontada pelos PCN's.

5.4 Tratamento da Informação

Esse tópico, ainda que interligado aos supracitados, foi destacado devido a sua importância e uso frequente na sociedade. Segundo os PCN's (BRASIL, 1997), o que se pretende neste tópico “não é o desenvolvimento de um trabalho baseado na definição de termos ou de fórmulas envolvendo tais assuntos”. Em relação aos três conteúdos matemáticos envolvidos: Estatística, Combinatória e Probabilidade, os PCN's (BRASIL, 1997) abordam que a finalidade, em relação ao primeiro, baseia-se na construção do conhecimento de coleta, organização, comunicação e interpretação de dados cotidianos. O segundo, Combinatória, objetiva a aprendizagem de solução de problemas que envolvam combinação, arranjo, permutação e princípio fundamental da contagem. E o terceiro, Probabilidade, requer que o discente compreenda fatos aleatórios e conjecture prováveis resultados para esses fatos.

As autoras Medina, Libik e Arsie (2012), em *A expressão gráfica na educação*, apresentam relações entre as expressões gráficas e o processo de ensino e aprendizagem. Estas afirmam serem, as representações enquanto elemento de comunicação próximo aos alunos, verdadeiras aliadas do processo de ensino independentemente do conteúdo abordado. As autoras realizaram uma revisão bibliográfica acerca da representação gráfica, seu conceito, origem e entrelaçamento ao ensino e construção do conhecimento. Para tal, utilizaram ideias de vários autores da área. Com o estudo, as autoras consideram que toda imagem é importante no processo de ensino e aprendizagem, pois a lembrança visual é o que predomina na mente e, assim, o conhecimento ocorre através de imagens mentais.

Thiel (2012), a propósito da *Representação semiótica no plano cartesiano: estudo do trânsito entre registros de representações matemáticas*, utiliza a teoria de Raymond Duval na intenção de compreender situações decorrentes do ensino de plano cartesiano, em aulas de matemática. Em primeiro instante, o autor tece ideias acerca da representação semiótica e o objeto de aprendizagem matemática. Em seguida, discute teóricos que regem sobre a temática e caracteriza o cenário de pesquisa. Os resultados apontam a importância da diversidade de representações e seus registros nos conceitos matemáticos envolvidos, fazendo a conversão correta desses. Além do mais, estes elementos colaboram para a ampliação das habilidades de raciocínio, análise e visualização dos alunos.

Assim, as representações, enquanto subsídios da prática docente dos conteúdos matemáticos intrínsecos a este eixo, de acordo com os trabalhos em questão, permitem o desenvolvimento de capacidades e habilidades matemáticas que vão desde conjecturas às combinações e interpretações de dados habituais.

6. PERCURSO METODOLÓGICO

Para a elaboração da pesquisa, realizaram-se estudos e levantamentos bibliográficos no campo da Educação Matemática. Discutiram-se ideias de autores como Raymond Duval, João Pedro da Ponte, Isabel Vélez, Gerard Goldin, entre outros. *A priori*, delimitou-se o tema de pesquisa após estudos realizados, seguido da verificação da relevância do tema e determinação dos objetivos da pesquisa. O estudo aprofundado, revisão teórica, ocorreu em sequência. A partir de então, conseguiu-se tecer discussões de ideais pertinentes às representações.

Esta pesquisa é de cunho qualitativo, como defendem Fiorentini e Lorenzato (2006), mediante os tipos de estudos apresentam a meta-análise qualitativa. Para eles é uma "revisão sistemática de outras pesquisas, visando realizar uma avaliação crítica das mesmas e/ou [...] produzir novos resultados ou sínteses a partir do confronto desses estudos, transcendendo aqueles anteriormente obtidos". Os autores continuam acerca da pesquisa qualitativa dizendo que "esse tipo de pesquisa oferece um aprofundamento do objeto a ser pesquisado, neste caso, o pensamento lógico argumentativo".

Nos tópicos seguintes, mencionar-se-ão o trajeto metodológico e a bagagem acadêmica do grupo de pesquisa.

6.1 As pesquisadoras

Este trabalho surgiu da afinidade do grupo com a temática e do interesse de pesquisa e discussão acerca das *Representações Pictóricas como elemento para a prática docente em Matemática: apontamentos teóricos e metodológicos*. Esta, por sua vez, foi elaborada por um grupo de alunas de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Minas Gerais-Campus São João Evangelista, mediante o interesse mútuo por pesquisa em Educação Matemática e face à necessidade de elaboração de um Trabalho de Conclusão de Curso. O grupo referido é composto por:

Edna Linhares, Licenciada em Matemática pelo IFMG-SJE (Instituto Federal de Minas Gerais), graduada em Normal Superior pela UNIPAC (Universidade Presidente Antônio Carlos), Pós-Graduada em Psicopedagogia pelo IESDE; trabalha há 13 anos na Educação Básica nas escolas do município de São João Evangelista-MG.

Júnia Audenice Oliveira, Licenciada em Matemática pelo IFMG-SJE (Instituto Federal de Minas Gerais), bolsista do PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Docente) desde julho de 2011, pela agência de fomento CAPES (Centro de Aperfeiçoamento de Ensino

Superior). Monitora do Programa de Iniciação Científica - PIC 2012, ação vinculada às Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), da agência Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Kelly Letícia Andrade Viana Gonçalves, Licenciada em Matemática pelo IFMG-SJE (Instituto Federal de Minas Gerais), bolsista do PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Docente) desde julho de 2011, pela agência de fomento CAPES (Centro de Aperfeiçoamento de Ensino Superior) e professora de Matemática atuante desde 2011.

6.2 Procedimentos metodológicos

A princípio, houve um grande interesse do grupo a partir da delimitação do tema, em desenvolver um trabalho voluntário de pesquisa e aplicação sobre a utilização das representações pictóricas, como ferramenta metodológica de auxílio na aprendizagem de conceitos e operações matemáticas. Este trabalho, *a priori*, estaria voltado para a aprendizagem de matemática em conflito às dificuldades diagnosticadas nos estágios supervisionados, prática docente e PIBID, em relação aos alunos das escolas municipais e estaduais de São João Evangelista.

Diante das experiências pedagógicas do grupo, já se sabia que a representação pictórica pode auxiliar no entendimento e resolução de situações-problema e que este tema aborda questões inerentes às dificuldades de aprendizagem matemática da atualidade. O grupo, então, teria dificuldades em registrar formalmente os resultados obtidos em prática, visto o pouco tempo de estudos, do mesmo, em relação ao tema em questão. Portanto, a pesquisa assumiu o caminho de revisão bibliográfica no intuito de discutir informações pertinentes ao tema que pudessem complementar e enriquecer o conhecimento acerca do assunto.

Para esse embasamento teórico, valeu-se de estudos e levantamentos bibliográficos no campo da Educação Matemática, que envolviam o conceito de representação e representação pictórica, de acordo com estudos nacionais e internacionais. Assim, foram revistos trabalhos construídos por pesquisadores e educadores do campo das representações em geral, como sendo ferramentas para expressão e comunicação do aluno. Comunicações estas que, através das informações orais e escritas comuns ao ensino coloquial, buscam novas estratégias de construção e elaboração do próprio algoritmo e compreensão dos processos de resolução de problemas.

Ainda tendo-se realizado a pesquisa bibliográfica e a partir dos registros relativos ao tema, o grupo não dispôs de recursos suficientes para a aplicação da pesquisa em campo, por se tratar de um tema relativamente novo. Por isso, a aplicação desta, devido ao pouco embasamento das pesquisadoras sobre o tema em pauta, não foi conveniente.

O interesse em dar continuidade a este trabalho, que é precoce no campo das orientações da aprendizagem através de imagens, surgiu da busca pela melhoria da prática docente que, futuramente, será desenvolvida pelo grupo. A responsabilidade em transformar a educação vigente ou, ainda, o modelo de aluno que recebe tudo pronto e acabado, cabe ao educador. Educador este que preza pela formação de um sujeito ativo e participativo e que assume papel de mediador do conhecimento, estimulando, instigando e valorizando seus alunos.

Acredita-se que a partir das considerações deste trabalho, possuir-se-á amparo teórico e metodológico, norteador do desenvolvimento da pesquisa em questão. Para tal, envolver-se-ão alunos e professores que aceitem o desafio de modificar as informações matemáticas em ícones ilustrativos e relevantes à aprendizagem. Desta forma, será permitida a verificação, na prática, se os registros de representação pictórica se mostram verdadeiramente relevantes na aquisição da aprendizagem matemática. Sendo assim, reserva-se, para o futuro, o desejo de desenvolver um trabalho mais abrangente na área da Educação Matemática com o tema em discussão.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa em questão teve, como norte, as dificuldades em se aprender os conceitos matemáticos e as barreiras na obtenção das habilidades de estratégias para resolução de situações problema. Esta, ainda, tomou como pré-requisito o fato de sermos frutos de histórias e registros, onde nossos antepassados já se comunicavam desde muitos anos, a partir de gravuras e desenhos. Considerou-se também que desde crianças temos os rabiscos e garatujas como nossas fontes primeiras de comunicação.

Acredita-se que, através da pesquisa bibliográfica e dos registros de próprias experiências como discentes e docentes, o grupo pode acrescentar que a representação pictórica pode ser utilizada como uma ferramenta de auxílio na aquisição dos saberes matemáticos. E esta representação auxilia também em todas as áreas que abranjam diversos tipos de imagens e transmitam informações que facilitem a expressão e a comunicação do estudante, diante de uma situação-problema. Muitas vezes, este estudante não consegue representar de sua mente para a forma oral ou simplesmente escrita, as informações contidas em um enunciado matemático.

Acredita-se, também, que o aluno, ao fazer uso dos recursos pictóricos, se torna mais ativo e determinado no que diz respeito a sua autonomia em construir seu próprio conhecimento, buscando entendimento nas gravuras, complementando suas descobertas nos registros escritos e nas informações contidas nas entrelinhas antes não visualizadas por ele. Contudo, quem ganha com essa ferramenta de ensino não é só o aluno, mas também o professor que, ao desenvolver no aluno as habilidades de busca de entendimento a partir do pictórico, tem seu trabalho facilitado e seu papel de mediador verdadeiramente colocado em prática. Com isso, ao instigar seu aluno a fazer uso das imagens para ilustrar seu entendimento, o professor propicia formação como um todo, conduzindo-o a construir saberes.

Em suma, as representações pictóricas podem contribuir de forma significativa para a aquisição de conhecimentos em diversas áreas, em especial nas habilidades matemáticas que se mostram a partir desta, de forma mais clara e objetiva que, em geral, servem como base esclarecedora de leitura que deve anteceder qualquer tipo de algoritmo nas operações matemáticas.

Assim, a reflexão em torno do objeto em análise é subsidiada por teóricos que realizaram pesquisas valendo-se das representações gráficas e semióticas.

Os estudos apontaram a viabilidade das representações pictóricas na comunicação Matemática e na construção significativa do conhecimento. Observou-se que tal recurso ainda é pouco utilizado pelos docentes que, de acordo com a literatura, as desconhecem em suas práticas pedagógicas.

Deparou-se com dificuldades no percurso da pesquisa por não se encontrar muitos trabalhos no âmbito do tema abordado. Os principais trabalhos brasileiros pesquisados são, majoritariamente, pautados em trabalhos estrangeiros. A busca por informações nos portais educacionais foi recurso essencial para se encontrar trabalhos relacionados à temática apresentada. É fato que a tecnologia permite que as instituições divulguem e apresentem suas pesquisas através de repositórios virtuais. Tal recurso contribuiu muito com esta pesquisa, pois muitos trabalhos foram encontrados nestes espaços.

Entretanto, percebeu-se a relevância da representação pictórica uma linguagem próxima do ser humano desde sua existência, sendo esta uma ferramenta eficaz para a solução de problemas matemáticos, favorecendo o ensino, a aprendizagem e os processos avaliativos.

Baseando-se na questão de pesquisa, tendo a representação pictórica como elemento que pode auxiliar na prática pedagógica em Matemática, pode-se afirmar que a utilização da representação pictórica aliada à resolução de problemas é fator relevante para a construção de uma aprendizagem sólida e concreta. E ainda, a pesquisa oferece um norte para averiguações das aplicabilidades deste tema, com ferramenta de trabalho do próprio educando.

A partir das leituras e registros, com base nas literaturas encontradas, verificou-se um consenso entre as opiniões dos autores e as experiências docentes vivenciadas pelo grupo. Existem possibilidades da representação pictórica coligada à resolução de problema de maneira a contribuir para a construção de diversas estratégias mentais na solução.

Não se pode afirmar que toda dificuldade encontrada pelo educando, quando este se depara com situações-problema, seja dada pela ausência do pictórico, nem que esta representação seja a chave para a resolução de toda e qualquer situação em matemática. Todavia, na prática docente de matemática, a utilização deste instrumento pode facilitar o ensino e aprendizagem por parte dos discentes.

Em face da diversidade humana, pode-se dizer que todo indivíduo, em suas peculiaridades, traz consigo algum tipo de dificuldade de aprendizagem, não sendo muitas vezes, as imagens gráficas suficientes para esclarecer fatos ou ideias contidas no enunciado. No entanto, o enfoque deste trabalho permeia o auxílio proporcionado por esta ferramenta de visualização.

Atendo-se à representação pictórica como um meio facilitador da compreensão de uma situação-problema escrita, percebe-se como esta se faz presente em um novo modelo de educação, discutido hoje por grandes pesquisadores educacionais que defendem um ensino mediado no qual o aluno é mestre de sua própria obra.

Entretanto, os desafios deste processo apresentam-se nas práticas docentes tradicionais perdurantes nos dias atuais. Nestas práticas, o professor considera dispensáveis os momentos reservados para investigar, analisar, levantar hipóteses, ilustrar e buscar estratégias de solução, nas aulas de matemática, fato que dificulta a aprendizagem em matemática.

Sabe-se que as novas tendências educacionais pretendem direcionar os caminhos da educação para uma relação de aprendizagem recíproca entre professor e aluno e, também, busca valorizar a autonomia do discente em sua aprendizagem. Com isso, o que se pretende é formar um agente ativo, feliz e realizado na sua vida acadêmica, profissional e social.

Por fim, entende-se, no momento, que a resolução de problemas pode ser um argumento novo, que promete mudanças relevantes na maneira como a aprendizagem matemática se dá no âmbito escolar e como é consolidada.

Espera-se, contudo, evidenciar, a partir desta pesquisa, a aplicação da representação pictórica junto à resolução de problemas como um importante subsídio para uma nova prática docente e propiciar novas discussões no âmbito deste tema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. 1997. Disponível em: <portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>. Acesso em 02/03/2012 às 19:37h.
- CARDOSO, Franciele Catelan. **O ensino da geometria e os registros de representação sob um enfoque epistemológico**. 2012. Disponível em <<http://www.uces.br/etc/conferencias/index.php/anpedsul/9anpedsul/paper/viewFile/831/270>>. Acesso em 13/08/2013 às 18:39h.
- CATTO, Glória Garrido. **Registros de representação e o número racional: uma abordagem nos livros didáticos**. 2000. Disponível em <www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/gloria_catto.pdf>. Acesso em 12/05/2013 às 07:33h.
- COLOMBO, Janecler Ap. Amorin; MORETTI, Mércles Thadeu. **Registros de representação semiótica e parâmetros curriculares nacionais: interfaces presentes e possíveis**. 2007. Disponível em <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html>. Acesso em 12/05/2013 às 07:33h.
- COUY, Lais; FROTA, Maria Clara Resende. **Representação e visualização no estudo de funções**. 2007. Disponível em <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html>. Acesso em 12/05/2013 às 07:33h.
- D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 1996.
- DUVAL, Raymond. **Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. In: MACHADO, S. D. A. Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. p.11-34.
- DUVAL, Raymond. **A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics**. 2006. Disponível em <http://www.researchgate.net/publication/225615683_A_Cognitive_Analysis_of_Problems_of_Comprehension_in_a_Learning_of_Mathematics>. Acesso em 23/03/2013 às 18:32h.
- DUVAL, Raymond. **Semiosis y pensamiento humano**. . Tradução de Myriam Veja Restrepo. Colômbia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogi, Grupo de Educacion Matemática, 2004.
- FLORES, Cláudia Regina; MORETTI, Mércles Thadeu. **O funcionamento cognitivo e semiótico das representações gráficas: ponto de análise para a aprendizagem matemática**. 2005. Disponível em <<http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/zetetike/article/view/2397>>. Acesso em 15/08/2013 às 22:36h.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia: Saberes Necessários à Prática Educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GARCIA, Luciane Maia Insuela; MISKULIN, Rosana Giaretta Sguerra. **A visualização e a representação geométrica de conceitos matemáticos e suas influências na constituição do conceito matemático**. 2006. Disponível em < www.fae.ufmg.br/ebiapem/completos/08-06.pdf>. Acesso em 13/08/2013 às 16:22h.

GOLDIN, G. **Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving**. In L. D. English, Handbook of international research in mathematics education. (pp.176-201). Routledge, NY: Taylor & Francis. 2008.

LOPES, Dejahyr Junior; FREITAS, José Luiz Magalhães de. **Registros de representação semiótica na compreensão de função do 1º grau por alunos da 1ª série do ensino médio**. 2009. Disponível em <http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_28/resistros.pdf>. Acesso em 21/04/2013 às 16:44h.

LORENZATTO, S; FIORENTINI, D. **Formação de professores: investigação em educação matemática- Percursos teóricos e metodológicos**. São Paulo: Autores Associados, 2006. 231 p.

MARQUES, Maria Luísa da Fonseca. **Representação Pictórica através do desenho no 3º ciclo do ensino básico: mecanismos de apreensão, apropriação e recriação**. 2012. Disponível em <http://www.academia.edu/3224684/REPRESENTACAO_PICTORICA_ATRAVES_DO_DESENHO_NO_3_CICLO_DO_ENSINO_BASICO_MECANISMOS_DE_APREENSAO_A_PROPRIACAO_E_RECRIACAO>. Acesso em 21/05/2013 às 15:15h.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e Investigação em Sala de Aula: Tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. 2ª Ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 216 p.

MEDINA, Simone da Silva Soria; LIBLIK, Ana Maria Petritis; ARSIE, Keilla Cristina. **A expressão gráfica na educação**. 2012. Disponível em <http://educere.bruc.com.br/CD2011/pdf/6056_3730.pdf>. Acesso em 04/07/2013 às 19:00h.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado de Educação. **Currículo Básico Comum**. 2006. Disponível em < crv.educacao.mg.gov.br>. Acesso em 02/03/2012 às 19:30h.

MORETTI, Méricles Thadeu. **O papel do registro de representação na aprendizagem de matemática**. 2007. Disponível em <<http://pt.scribd.com/doc/59257725/Pierce>>. Acesso em 21/06/2013 às 21:33h.

NOBRE, Sandra; AMADO, Nélia; PONTE, João Pedro da. **Representação na aprendizagem de sistemas e equações**. 2011. Disponível em <http://cmup.fc.up.pt/cmup/eiem/grupos/documents/14.Nobre_Amado_Ponte.pdf>. Acesso em 21/06/2013 às 20:23h.

PATRÍCIO, Rafael Silva; ALMEIDA, Maysa da Silva Leite. **O papel das representações semióticas no ensino de matemática**. 2011. Disponível em

<<http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/>>. Acesso em 15/08/2013 às 00:25h.

PATROCÍNIO, Andréa. **Relação entre representações gráficas e escolarização**. 2007. Disponível em <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html>. Acesso em 15/08/2013 às 00:25h.

PEREIRA, Joana Mata; PONTE, João Pedro. **Raciocínio matemático em contexto algébrico uma análise com alunos de 9.º ano**. 2011. Disponível em <<http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/>>. Acesso em 08/06/2013 às 13:56h.

PEIRCE, Charles Sanders. **Semiótica**. São Paulo: Editora Perspectiva, 2000.

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia de. **Investigações Matemáticas em Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, João Pedro; MARTINHO, Maria Helena. **Representações no ensino da Álgebra**. 2011. Disponível em <cmup.fc.up.pt/cmup/eiem/grupos/documents/10.Resumo%20GD2.pdf>. Acesso em 05/04/2013 às 14:22h.

PONTE, João Pedro; OLIVEIRA, Hélia. **Investigação sobre o ensino da álgebra: uma reflexão sobre estudos realizados na universidade de Lisboa (2006-11)**. 2011. Disponível em <<http://cmup.fc.up.pt/cmup/eiem/sesoes/documents/Conf%20Plen%C3%A1ria%20Ponte%20e%20Oliveira.pdf>>. Acesso em 05/04/2013 às 14:22h.

PONTE, João Pedro; QUARESMA, Marisa. **A construção das partes e a reconstrução da unidade na compreensão dos números racionais**. 2011. Disponível em <www.ie.ul.pt/pls/portal/docs/1/334330.PDF>. Acesso em 02/04/2013 às 11:35h.

PONTE, João Pedro; VELEZ, Isabel. **As representações matemáticas nas concepções dos professores do 1.º ciclo do ensino básico: um estudo exploratório**. 2012. Disponível em <<http://www.ie.ul.pt/pls/portal/docs/1/334314.PDF>>. Acesso em 02/04/2013 às 11:35h.

PONTE, João Pedro; VELEZ, Isabel. **Representações em tarefas algébricas no 1º ciclo**. 2011. Disponível em <<http://www.ie.ul.pt/pls/portal/docs/1/334682.PDF>>. Acesso em 02/04/2013 às 11:35h.

PONTE, João Pedro; VELEZ, Isabel. **Representações em tarefas algébricas no 2º ano de escolaridade**. 2010. Disponível em <www.ie.ul.pt/pls/portal/docs/1/304673.PDF>. Acesso em 02/04/2013 às 11:35h.

POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

QUARESMA, Marisa; PONTE, João Pedro da Ponte. **As tarefas e a comunicação numa abordagem exploratória no ensino dos números racionais**. 2012. Disponível em <<http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/7068/1/Quaresma,%20Ponte%20GD1-10%20EIE%202012.pdf>>. Acesso em 22/05/2013 às 03:15h.

QUARESMA, Marisa; PONTE, João Pedro da Ponte. **A compreensão dos números racionais, comparação e ordenação: o caso de Leonor**. 2010. Disponível em <<http://repositorio.ul.pt/handle/10451/6560>>. Acesso em 22/05/2013 às 02:50h.

RABELO, E. H. **Textos Matemáticos: Produção e Resolução de Problemas**. Rio de Janeiro: Vozes, Rio de Janeiro, 2002.

ROMANATTO, Mauro Carlos. **Resolução de problemas na formação de professores e pesquisadores**. São Paulo. 2008. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos_completos/completo6>. Acesso em 30/04/ 2011 às 13:48h.

ROSA, Claudia Carreira da. **Os registros de representação semiótica e a modelagem matemática: a realização de conversões em uma atividade no ensino médio**. 2009. Disponível em <<http://seer.fafiman.br/index.php/dialogosesaberes/article/viewFile/38/32>>. Acesso em 17/04/2013 às 13:19h.

SANDES, Joana Pereira. **O desenho como representação do pensamento matemático da criança no primeiro ano de alfabetização**. 2009. Disponível em <<http://hdl.handle.net/10482/8672>>. Acesso em 19/05/2013 às 15:35h.

SANTOS, Flávia M. T.; GRECA, Ileana M.. **Promovendo aprendizagem de conceitos e de representações pictóricas em Química com uma ferramenta de simulação computacional**. 2005. Disponível em <reec.uvigo.es/volumenes/volumen4/ART7_Vol4_N1.pdf>. Acesso em 05/04/2013 às 14:39h.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Ler, Escrever e Resolver Problemas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; MUNIZ, Cristiano Alberto. **A matemática em sala de aula: reflexões e propostas para os anos iniciais do ensino fundamental**. Porto Alegre: Penso, 2013.

STERNBERG, R. J. **Psicologia Cognitiva**. Tradução de Maria Regina Borges Osório- Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

THIEL, Afrânio Austregésilo. **Representação semiótica no plano cartesiano: estudo do trânsito entre registros de representações matemáticas**. 2012. Disponível em <<http://matematica.ulbra.br/ocs/index.php/ebiapem2012/xviebrapem/paper/viewFile/685/374>>. Acesso em 19/05/2013 às 16:43h.

VERGNAUD, Gerald. **A comprehensive theory of representation for mathematics education**. Journal of Mathematical Behavior, p. 167-181, 1998.

VIANA, Odaleia Aparecida. **As representações pictóricas de alunos do ensino médio na resolução de problemas de geometria: uma análise qualitativa**. 2007. Disponível em: <www.sbem.com.br/files/Fix_enem/Comunicacao_Cientifica/Resumos>

C00596629800R.doc&ei=0_ZKUp-QCo3o8QSH7IDIBA&usg=AFQjCNHC3Ky8iYXe-rPQCw-znFIbYQWc5g>. Acesso em 30/04/2011 às 14:29h.